

Modul I

Dasar Bilangan Kompleks

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat memahami asal bilangan kompleks dan pangkat j
2. Mahasiswa mampu menuliskan bilangan kompleks kedalam bentuk grafis
3. Mahasiswa mengenal bentuk-bentuk bilangan kompleks
4. Mahasiswa mampu mengoperasikan persamaan bilangan kompleks pada operator penjumlahan dan pengurangan.

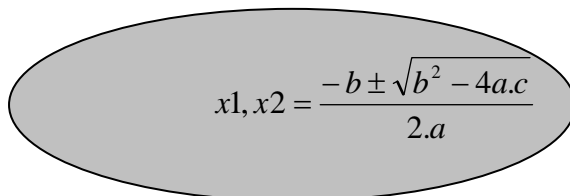
A. Pendahuluan

Bilangan kompleks merupakan bilangan yang banyak digunakan dalam teknik elektro untuk menyelesaikan berbagai persoalan analitik. Banyak pemecahan masalah keteknik elektroan yang mampu diselesaikan dengan menggunakan bilangan kompleks.

Bilangan kompleks berasal dari akar-akar persamaan kuadrat yang tidak dapat didefinisikan lebih lanjut. Biasanya akar-akar persamaan kuadrat pada kondisi tersebut dikatakan sebagai bilangan imajiner atau bilangan khayal. Bilangan khayal merupakan kesepakatan para ahli matematika untuk menyelesaikan persamaan yang memiliki akar -1 atau $\sqrt{-1}$

Dari mana munculnya $\sqrt{-1}$?, akar-akar persamaan kuadrat diperoleh dengan menggunakan rumus abc.

Rumus abc :


$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Perhatikan soal berikut :

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Akar-akar persamaan kuadratnya adalah :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 20}}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{-1} \cdot 4 \quad \text{atau} \quad x_2 = -1 - \sqrt{-1} \cdot 4$$

Pada prinsipnya akar-akar persamaan kuadrat tidak dapat diselesaikan. Bilangan yang muncul dari akar-akar imajiner persamaan kuadrat tersebut **bilangan kompleks**. Bilangan kompleks yang terbentuk biasa ditulis dengan notasi sebagai berikut :

$$x = a + j b \quad \text{atau} \quad x = a - j b$$

a adalah bilangan real dan **jb** adalah bilangan imajiner jadi bilangan kompleks adalah pengabungan antara bilangan real dan bilangan imajiner

j merupakan simbole dari $\sqrt{-1}$. atau

$$\sqrt{-1} = j$$

Hasil dari persolan diatas adalah :

$$x_1 = -1 + j2 \quad \text{dan} \quad x_2 = -1 - j2$$

kenapa hasilnya dua ?

Dikatakan bahwa x_1 memiliki konjugasi bilangan yaitu x_2

Perhatikan persolan berikut :

$$\begin{array}{ll} j = ? & j^4 = ? \\ j^2 = ? & j^5 = ? \\ j^3 = ? & j^6 = ? \end{array}$$

“bagaimana ? “

“Apa bisa dikerjakan ? “

“mudah bukan ? “

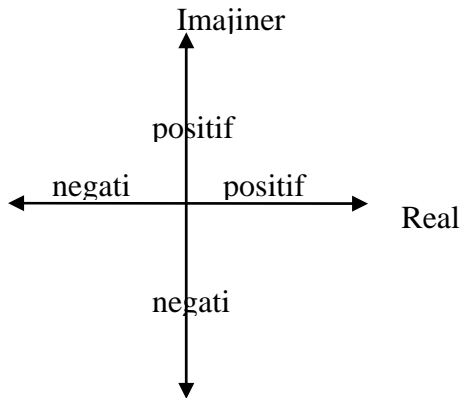
Latihan 1

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat adalah bilangan kompleks atau tidak bilangan kompleks.

1. $x^2 + 3x + 5$
2. $2x^2 - x + 5$
3. $x^2 + 2x - 4$
4. $3x^2 + 6x + 10$
5. $x^2 + 5x + 2$
6. $2x^2 + 2x - 5$
7. $-x^2 - x - 4$
8. $x^2 + 2x + 8$
9. $x^2 - 3x + 4$
10. $4x^2 + 5x - 1$

B. Bilangan kompleks dalam grafis

Setiap bilangan dapat ditulis dalam bentuk grafis, yaitu ditulis dalam garis bilangan. Untuk bilangan kompleks memiliki garis bilangan ganda yaitu kawasan real dan kawasan imajiner.



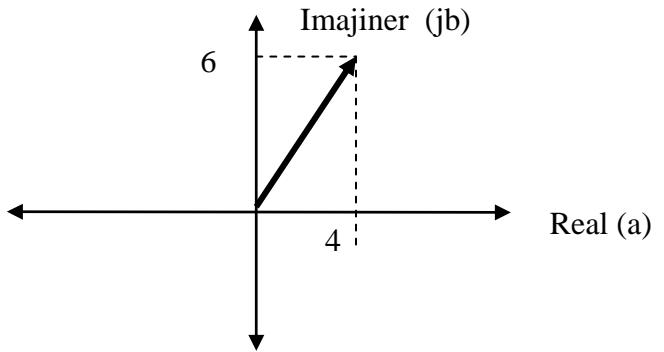
Perhatikanlah bilangan kompleks berikut ini,

$x = 4 + j 6$

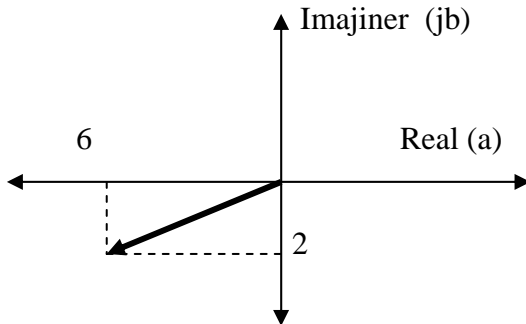
bisakah dituliskan kedalam bentuk grafis ?

Tentu bisa, uraikan dulu → 4 adalah bilangan real positif

→ $j6$ adalah bilangan imajiner positif



Jika dibalik, berapa nilai bilangan kompleks dari grafis berikut.



Sudahdapatkah hasilnya ?
 Nilai Bilangan kompleks adalah

$$x = -6 - j 2$$

Latihan 2

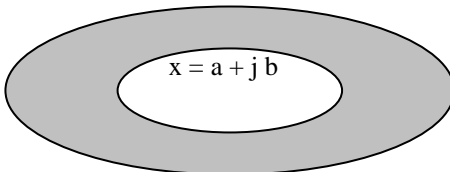
Buatkan kedalam bentuk grafis bilangan kompleks berikut,

1. $x = -12 + j 6$
2. $x = 3 - j 8$
3. $x = -6 - j 10$
4. $x = 2 + j2$
5. $x = 12$
6. $x = -5$
7. $x = j12$
8. $x = -j 11$

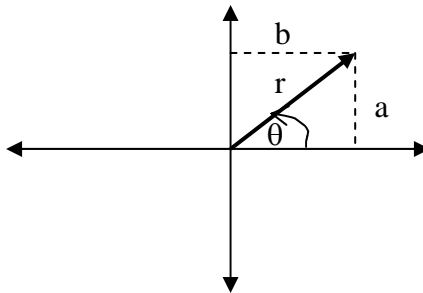
C. Bentuk-bentuk bilangan kompleks

Bilangan kompleks dapat ditulis dengan notasi yang berbeda. Bentuk-bentuk tersebut disesuaikan dengan kebutuhan. Bentuk notasi yang telah diperkenalkan diatas disebut dengan **bentuk umum**. Sebelum dijelaskan bentuk-bentuk yang lain terlebih dahulu perhatikan bahasan berikut,

Bila diketahui bilangan kompleks dengan nilai,



Bentuk grafis bilangan kompleks diatas adalah ,



r adalah sisi miring, yang nilainya adalah

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

θ adalah sudut kemiringan dengan nilai ,

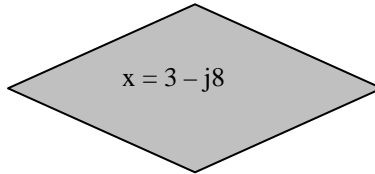
$$\theta = \text{arc tg } b/a$$

Sudut kemiringan selalu dihitung dari sumbu real positif ke arah berlawanan jarum jam. Cara menghitung sudut dari 0 – 360 derajat. Atau cara menghitung dapat dibagi 0 – 180 derajat positif (arah berlawanan jarum jam) dan 0 – (-180) derajat (searah jarum jam).

Berdasarkan cara grafik diatas dapat dibedakan beberapa bentuk penulisan bilangan kompleks. Bentuk yang lain adalah,

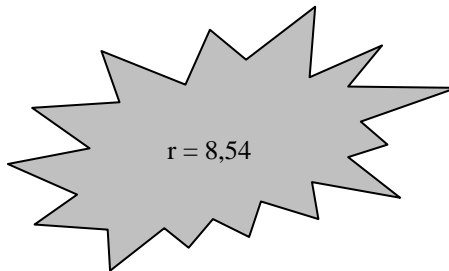
Bentuk polar	$x = r \theta$	dan $x = r \sqrt{-\theta}$ atau $x = r \sqrt{\theta}$
Bentuk rectangular	$x = r(\cos \theta + j \sin \theta)$	dan $x = r(\cos \theta - j \sin \theta)$
Bentuk exponensial	$x = r. e^{j\theta}$	dan $x = r. e^{-j\theta}$

Perhatian persamaan bilangan kompleks berikut,

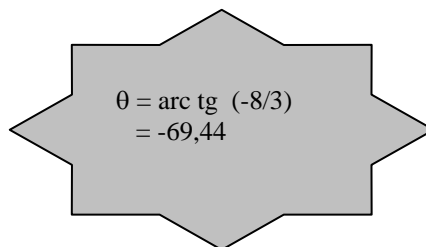

$$x = 3 - j8$$

bentuk umum bilangan kompleks diatas dapat dirobah kedalambentuk bentuk penulisan yang lain.

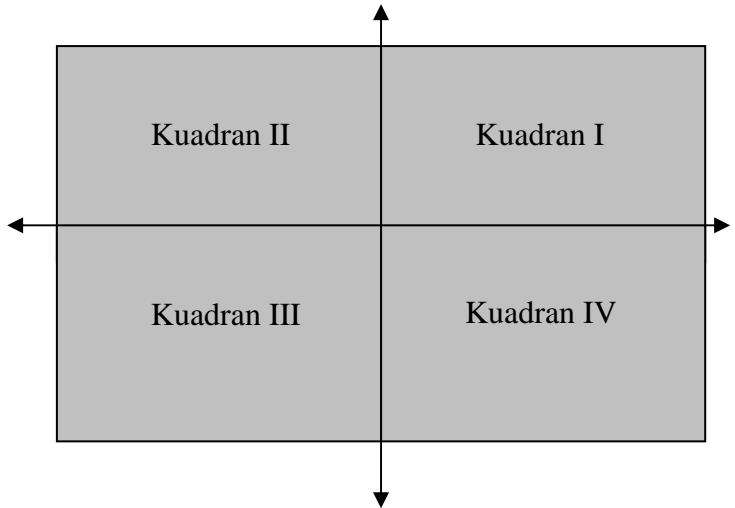
$$r = \sqrt{3^2 + 8^2}$$


$$r = 8,54$$

Sudut yang dibentuk adalah,


$$\begin{aligned}\theta &= \text{arc tg } (-8/3) \\ &= -69,44\end{aligned}$$

untuk menentukan sudut, harus terlebih dahulu diketahui posisi dari kuadran garis bilangan. Apaitu kuadran? Perhatikan gambar dibawah ini,



Kuadran I berada pada sudut ke 0 - 90

Kuadran II berada pada sudut ke 90 - 180

Kuadran III berada pada sudut ke 180 - 270 atau $(-90) - (-180)$

Kuadran IV berada pada sudut ke 270 - 360 atau $0 - (-90)$

Pad soal diatas berada pada kuadran berapa ?

Tepat sekali

Kuadran IV maka sudut yang terbentuk adalah $-69,44$

Sekaran bisa dirobah kedalam bentuk penulisan yang lain

Bentuk polar $x = 8,54 \angle -69,44$

Bentuk rectangular $x = 8,54 (\cos 69,44 - j \sin 69,44)$

Bentuk exponensial $x = 8,54 \cdot e^{-j69,44}$

Latihan 3

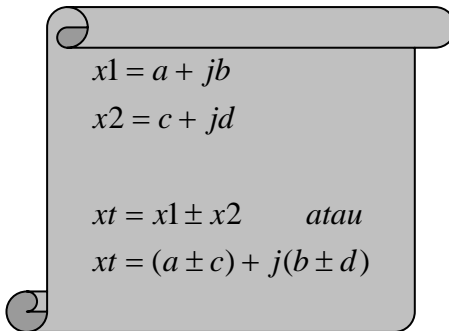
Untuk memahami lebih lanjut coba selesaikan soal berikut ini,

1. $x = -2 + j 6$
2. $x = 13 - j 8$
3. $x = -8 - j 10$
4. $x = 2 + j4$
5. $x = 2$
6. $x = -3$
7. $x = j2$
8. $x = -j 10$

D. Operasional penjumlahan dan pengurangan

Operasional matematika penjumlahan dan pengurangan merupakan konsep yang umum dan sederhana. Namun bagian ini merupakan bagian yang terpenting dan mendasar. Prinsip penjumlahan dan pengurangan adalah sama, memenuhi sifat-sifat aljabar penjumlahan dan pengurangan.

Sifat penjumlahan dan pengurangan seperti berikut,


$$\begin{aligned}x_1 &= a + jb \\x_2 &= c + jd \\ \\x_t &= x_1 \pm x_2 \quad \text{atau} \\x_t &= (a \pm c) + j(b \pm d)\end{aligned}$$

Perhatikan kasus berikut,

$$x_1 = 2 - j3$$

$$x_2 = 5 + j4$$

Selesaikanlah :

$$x_T = x_1 + x_2$$

jawab :

$$\begin{aligned}x_T &= (2 - j3) + (5 + j4) \\ &= (2 + 5) + j(-3 + 4) \\ &= 7 + j\end{aligned}$$

Keterangan :

Arti dari jawaban diatas adalah bilangan kompleks saat menjumlah dan mengurangkan hanya boleh dilakukan pada bilangan sejenis. Bilangan real hanya boleh dijumlahkan/dikurangkan dengan bilangan real yang lain. Demikian juga dengan bilangan imajiner hanya boleh dijumlahkan/dikurangkan dengan bilangan imajiner yang lain

Sekarang cobalah untuk mengurangi x_1 dengan x_2 ? apa yang terjadi ?

Apakah jawabannya sesuai dengan hasil berikut ini ?

	$x_T = -3 - j7$	
--	-----------------	--

Jika sama berarti anda benar !!!

Latihan 4

$$x_1 = -2 + j 6$$

$$x_2 = 13 - j 8$$

$$x_3 = -8 - j 10$$

$$x_4 = 2 + j 4$$

$$x_5 = 2$$

$$x_6 = -3$$

$$x_7 = j 2$$

$$x_8 = -j 10$$

Selesaikanlah :

1. $x_1 = x_1 + x_2 - x_5$

2. $x_1 = x_8 + (x_2 + x_5)$

3. $x_1 = x_3 - x_2 - x_4$

4. $x_1 = x_2 + x_2 - x_5$

5. $x_1 = (x_7 + x_6) - x_8$