

Modul III

Bilangan Hyperbolik

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat mengenal bilangan hiperbolik
2. Mahasiswa mengenal fungsi grafik bilangan hiperbolik
3. Mahasiswa bisa menggunakan kalkulator mendapatkan bilangan hiperbolik
4. Mahasiswa dapat menghitung invers hiperbolik

A. Pendahuluan

Persamaan hiperbolik memiliki kemiripan dengan trigonometri, yang sifatnya merupakan fungsi sirkular. Lebih sederhana lagi merupakan fungsi lingkaran. Letak perbedaan fungsi trigonometri bersifat periodik, selalu berubah-ubah dan membentuk pola yang sama.

Exponensial merupakan bilangan dasar pembentukan fungsi hiperbolik. Apa itu exponensial ? exponensial adalah bilangan berpangkat dengan bilangan dasar merupakan hasil dari penjumlahan sebuah deret.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

untuk pangkat 1 nilai dari $e^x = e \cong 2,718281828$. Jadi exponensial memiliki bilangan dasar 2,718281828.....

Bilangan hiperbolik dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

dari komponen dasar fungsi hiperbolik dapat diturunkan fungsi-fungsi turunan yang lain seperti,

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

B. Hiperbolik dalam grafik

Seperti yang dijelaskan diatas fungsi hiperbolik merupakan fungsi lingkaran, dengan membentuk kurva-kurva yang menyerupai lingkaran. Dapat dilakukan percobaan untuk membentuk grafik dari fungsi hiperbolik.

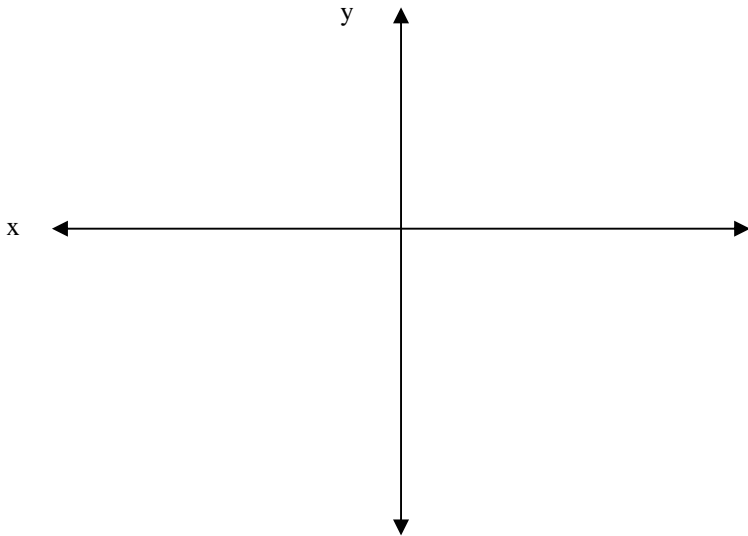
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

apabila nilai x disusun berdasarkan beberapa nilai maka diperoleh nilai dari $\sinh x$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
e^x	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
e^{-x}	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
$\sinh x$?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Isilah hasil dari nilai x yang telah ditentukan diatas !!!

Buatkanlah garis bilangan dengan sumbu x dan y



Sumbu ini diolah dengan menentukan bahwa nilai x adalah nilai yang telah diketahui seperti pada tabel. Untuk sumbu y dibagi atas beberapa bagian yaitu,

$$y = e^x$$

$$y = e^{-x}$$

$$y = \text{Sinh } x$$

Dengan cara yang sama untuk fungsi cosh x

X	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
e^x	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
e^{-x}	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
Cosh x	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Tentukan bentuk grafiknya !!!

Selanjutnya lakukan juga untuk fungsi turunan yaitu,

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{sinh} x}{\operatorname{cosh} x}$$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Sinh x	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
Cosh x	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Bagaimana bentuk kurvanya?

Silahkan dicoba!!!!

C. Perhitungan fungsi hiperbolik

Untuk menghitung nilai fungsi hiperbolik dapat dilakukan dengan berbagai cara :

1. dengan menggunakan persamaan deret eksponensial
2. dengan tabel hiperbolik
3. dengan kalkulator.

Cara termudah adalah dengan menggunakan kalkulator. Dengan cara kalkulator ada dua cara,

1. dengan menggunakan rumus
2. dengan cara langsung

dengan cara rumus,

hitunglah $\sinh 1,234$

jawab

$$\begin{aligned} \sinh 1,234 &= \frac{1}{2} (e^{1,234} - e^{-1,234}) \\ &= 1/2(1,234 \quad \text{shift} \quad e^x \quad = \quad 3,4349 \\ &\quad -1,234 \quad \text{shift} \quad e^x \quad = \quad 0,2911) \\ &= \frac{1}{2} (3,4349-0,2911) \\ &= 1,5719 \end{aligned}$$

cara langsung

$$\sinh 1,234 = 1,234 \quad \text{hyp} \quad \sin \quad = \quad 1,5719$$

Latihan 1

1. Gunakan cara rumus,

- | | |
|----------------|----------------|
| a. sinh 3,12 | g. sinh 12,34 |
| b. cosh 5,32 | h. sinh -12,34 |
| c. tgh 0,123 | i. Cosh 1 |
| d. sinh -2,134 | j. cosh 1000 |
| e. cosh 3,123 | k. tgh 5 |
| f. tgh -0,432 | l. tgh 0,99999 |

2. Gunakan cara langsung,

- | | |
|-------------------|-----------------|
| a. sinh 13,12 | g. sinh 122,34 |
| b. cosh 15,32 | h. sinh -122,34 |
| c. tgh 0,12334 | i. Cosh 11 |
| d. sinh -12,254 | j. cosh 10001 |
| e. cosh 13,1213 | k. tgh 15 |
| f. tgh -101,41132 | l. tgh 0,99999 |

D. Invers hiperbolik

Invers hiperbolik adalah kebalikan nilai, pada saat mencari nilai fungsi hiperbolik berarti memperoleh nilai pada sumbu y . Invers berarti kebalikannya yaitu yang diketahui sumbu y , yang akan dicari adalah sumbu x .

Notasi invers hiperbolik

$$\sinh^{-1} y = x$$

atau

$$\cosh^{-1} y = x$$

kasus

$$\sinh^{-1} 2,111$$

cara rumus

$$\sinh^{-1} 2,111 = x$$

sama dengan

$$\sinh x = 2,111$$

$$1/2(e^x - e^{-x}) = 2,111$$

$$e^x - e^{-x} = 4,222$$

$$e^x - \frac{1}{e^x} = 4,222$$

$$(e^x)^2 - 1 = 4,222 e^x$$

$$(e^x)^2 - 4,222 e^x - 1 = 0$$

dengan menggunakan rumus abc,

$$e^x = \frac{4,222 \pm \sqrt{4,222^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

$$e^x = 4,446 \quad \text{atau} \quad e^x = -0,224$$

dari hasil diatas x positif pada kurva y positif pula, maka

jawaban yang tepat adalah ,

$$e^x = 4,446$$

$$x = \ln 4,446$$

$$x = 1.492$$

cara langsung.

$$x = 2,111 \quad \text{hyp} \quad \text{shift} \quad \text{sin} \quad = \quad 1,492$$

Latihan 2

3. Gunakan cara rumus,
- a. $\text{Sinh}^{-1} 3,12$
 - b. $\text{cosh}^{-1} 5,32$
 - c. $\text{tgh}^{-1} 0,123$
 - d. $\text{sinh}^{-1} -2,134$
 - e. $\text{cosh}^{-1} 3,123$
 - f. $\text{tgh}^{-1} -0,432$
 - g. $\text{sinh}^{-1} 12,34$
 - h. $\text{sinh}^{-1} -12,34$
 - i. $\text{Cosh}^{-1} -1$ (sebutkan sebabnya)
 - j. $\text{cosh}^{-1} 1000$
 - k. $\text{tgh}^{-1} 5$
 - l. $\text{tgh}^{-1} 0,99999$
4. Gunakan cara langsung,
- a. $\text{sinh}^{-1} 13,12$
 - b. $\text{cosh}^{-1} 15,32$
 - c. $\text{tgh}^{-1} 0,12334$
 - d. $\text{sinh}^{-1} -12,254$
 - e. $\text{cosh}^{-1} 13,1213$
 - f. $\text{tgh}^{-1} -101,41132$
 - g. $\text{sinh}^{-1} 122,34$
 - h. $\text{sinh}^{-1} -122,34$
 - i. $\text{Cosh}^{-1} 11$
 - j. $\text{cosh}^{-1} 10001$
 - k. $\text{tgh}^{-1} 15$
 - l. $\text{tgh}^{-1} 0,99999$