Materi V

Determinan

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat mengenali determinan.
2. Mahasiswa dapat merubah persamaan linier menjadi persamaan determinan.
3. Mahasiswa menyelesaikan determinan ordo dua
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan determinan ordo tiga
5. Mahasiswa mengetahui bentuk penyelesaian determinan ordo banyak

A. Pendahuluan

Determinan merupakan salah satu bahagian dari matrik. Keguaan dan fungsinya sangat luar biasa hebatnya. Matrik dan determinan menjadi sangat populer ketika sistem komputer banyak digeluti. Sehingga banyak analisa-analisa yang mepertimbangkan banyak hal mampu teratasi dengan metoda matrik dan determinan. Jadi matrik dan detrminan merupakan kajian yang sama namaun dalam metoda penyelesaian masalah sangat jauh berbeda.

Determianan dinotasikan berupa pembatas dua gris lurus,

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

Kebetulan notasi yang diberikan contoh merupakan determinan ordo 3x3. Salah satu keguanan dari determinan adalah menyelesaiakan persoalan eliminasi atau subsitusi. Umumnya persoalan-persoalan yang menyerupai persoalan eliminasi atau subsitusi dapat diselesaikan dengan mudah dengan menggunakan matrik.

Kasus eliminasi dan sumbsitusi
Ada dua persamaan (fungsi x),

$$5x + 3y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2x - y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

pada metoda eliminasi dapat diselesaikan dengan cara berikut,

samakan variabel yang akan dihilangkan, misalanya yang akan dihilangkan adalah variabel y. kaliakan persamaan kedua dengan 3 supaya variable y pada kedua persamaan memiliki konstanta yang sama yaitu tiga .
persamaan akan menjadi

$$5x + 3y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$6x - 3y = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Perhatikan tanda didepan variabel y, ternyata persamaan pertama memiliki tanda positif (+). Persamaan kedua memiliki tanda negatif (-). Jika kedua tanda berbeda maka untuk menghilangkan variable y harus dijumlahkan kedua persamaan. Ingat jumlahkan bilangan yang sejenis, hasilnya adalah

$$11x = 13$$
$$\therefore x = \frac{13}{11}$$
$$x = 1{,}181818$$

setelah itu tinggal disubsitusikan dengan sembarangan pada kedua persamaan. Persamaan yang paling sederhana adalah persamaan dua.

$$2(1{,}181818) - y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$-y = 3 - 2{,}36363$$

$$\therefore \text{y} = \text{-0,636364}$$

cara kedua bisa juga dengan cara subsitusi,

$$5x + 3y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2x - y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

persamaan kedua adalah termudah.

$$2x - y = 3$$

$$2x = 3 + y$$

$$\therefore x = 1/2(3 + y)$$

hasil ini disubsitusi kepersamaan pertama

$$5\ (1/2\ (3 + y))\ \ + 3y = 4$$

$$\frac{15}{2} + \frac{5y}{2} + 3y = 4$$

$$15 + 5y + 6y = 8$$

$$11y = 8 - 15$$

$$y = \frac{-7}{11}$$

$$\therefore y = -0{,}636364$$

sama bukan maka tentukan pulay x nya.. pasti akan sama……….

Bagaimana cara untuk menyelesaikan dengan determinan……?
Dijawab pada bagian berikut

B. Penyelesaian matrik ordo dua

Penyelesaian metoda determinan dapat dilakukan sebagai berikut,

$$A=\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$$

- +

determinan bernilai,

$$A(\text{det})=a11.a22-a12.a21$$

Sebelum peroalan eleminasi dan subsitusi langsung diselesaikan, harus diketahui dulu cara untuk mindahkan kedua persamaan kedalam bentuk determinan.

Persamaan I . $ax+by=c$

Persamaan II $dx+ey=f$

Dirobah menjadi persamaan :

$$ax+by-c=0$$
$$dx+ey-f=0$$

Jadikan persamaan diatas menjadi persamaan determinan yaitu,

$$x=\frac{\Delta 1}{\Delta \circ}$$
$$y=\frac{\Delta 2}{\Delta \circ}$$

$$\Delta\circ = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} -c & b \\ -f & e \end{vmatrix}$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} a & -c \\ d & -f \end{vmatrix}$$

berdasarkan contoh diatas, selesaikanlah persamaan berikut

$$5x + 3y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2x - y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$5x + 3y - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$2x - y - 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

persamaan tersebut dapat diselesaikan,

$$\Delta\circ = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -15 + 8 = -7$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$$

$$x = \frac{\Delta 1}{\Delta\circ} = \frac{-13}{-11} = \ldots\ldots\ldots ?$$

$$y = \frac{\Delta 2}{\Delta \circ} = \frac{-7}{-13} = ...?$$

C. Determinan Ordo 3

Determinan ordo tiga merupakan penjabaran dari ordo dua. Anggota ordo 3x3 bilangan. Prinsip penyelesaian masalah hampir sama dengan ordo dua tetapi dipecah-pecah menjadi beberapa bagian. Pecahan bagian disebut dengan kofaktor. Kovaktor terbentuk dari minor masin-masing anggota.

Misalkan dimiliki satu determinan ordo 3x3

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

masing-masing dibentuk kofaktor masing-masing komponen dengan cara minor

minor a11

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$$ kofaktornya adalah :

$$\begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}$$

minor a12

$$\begin{array}{ccc} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{array}$$

kofaktornya adalah $$\begin{vmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$$

minor a13

$$\begin{array}{ccc} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{array}$$

kofaktornya adalah $$\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$$

minor a21

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$$

kofaktornya adalah $\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}$

minor a22

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$$

kofaktornya adalah $\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$

minor a23

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$$

kofaktornya adalah $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$

minor a31

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$$

kofaktornya adalah $\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}$

minor a32

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$$

kofaktornya adalah $\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a21 & a23 \end{vmatrix}$

minor a33

$$\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$$

kofaktornya adalah $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$

Dengan demikian kita udah dapat kofaktor semuanya,

$$\left|\begin{array}{ccc} +\begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a31 & a32 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a21 & a23 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} \end{array}\right|$$

Untuk mendapatkan determinannya cukump mengambil salah satu kolom saja atau salah satu baris saja. Cara nya adalah,

Ambil baris I

$$\text{Det} = +a11\begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} -a12\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix} +a13\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$$

Nilai detminan diatas akan sama bila dimbil baris II

$$\text{Det}=-a21\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} +a22\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} -a23\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$$

Atau dimbil kolom I

$$\text{Det}=+a11\begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} -a21\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} +a31\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}$$

Atau baris dan kolom yang saudara ingini,

Penyelesaianya sama dengan mengunakan determinan ordo dua.

Untuk penyelesaian persolaan x,y,dan x
Diperoleh persamaan

$$\frac{x}{\Delta 1} = -\frac{y}{\Delta 2} = \frac{z}{\Delta 3} = \frac{1}{\Delta 0}$$

penggunaan delta sama dengan cara persamaan pada ordo dua.

D. Determinan ordo banyak

Bagian ini merupakan pengayaan bagi peserta perkuliahan. Materi ini hanya sebuah wacana dan gambaran bagi peseta untuk menyelesaikan determinan orde banyak. Prinsip penyelesaian ordo dua, ordo tiga dan ordo banyak sebenarnya hampir sama. Tetap mengunakan kofaktor dengan metoda minor. Maka akan diperoleh nilai determinannya setelah ditemukan nilai ordo dua.

Misal determinan ordo empat, diperoleh kofaktor orde empat sehingga didalamnya tedapat ordo tiga, dapatkan kofaktor orde tiga untuk memperoleh determinan ordo dua. Setelah itu baru diperoleh determinan semuanya.

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{vmatrix}$$

det =+ a11(+a22$\begin{vmatrix} a33 & a34 \\ a43 & a44 \end{vmatrix}$-a23$\begin{vmatrix} a32 & a34 \\ a42 & a44 \end{vmatrix}$+a24$\begin{vmatrix} a32 & a33 \\ a42 & a43 \end{vmatrix}$)-

a12(a21$\begin{vmatrix} a33 & a34 \\ a43 & a44 \end{vmatrix}$

…………dst

untuk persamaan determinan ordo 4 berlaku

$$\frac{x}{\Delta 1} = -\frac{y}{\Delta 2} = \frac{z}{\Delta 3} = \frac{r}{\Delta 4} = \frac{1}{\Delta 0}$$

Latihan 1

1. Tentukan determinan dari persamaan berikut ini
   a) det A=$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$
   b) det B = $\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ -23 & -7 \end{vmatrix}$

2. Tentukan x dan y dari persamaan berikut
   a) $\begin{matrix} 2x + 3y = 10 \\ -3x - 2y = -3 \end{matrix}$

   b) $\begin{matrix} 14x - 2y = 10 \\ 23x + 32y = -100 \end{matrix}$

c) $$\begin{aligned} 22x + 33y &= 8 \\ 4y - 3x &= 10 \end{aligned}$$

3. Selesaika determian berikut ini,

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 5 \\ -9 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 8 \\ -9 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 12 & 3 & -4 \\ 4 & 11 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

d) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

4. Tentukan nilai x,y,z

a) $$\begin{aligned} 12x + 11y - 3z &= 21 \\ 5x + 2y &= -10 \\ 8x + 4y + 9z + 2 &= 4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 10y - 22x + 11z &= 2 \\ 4x + 5y - z &= 100 \\ 5z - 2x + 12y &= 0 \end{aligned}$$