

Materi VI

Matrik

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat mengenali matrik.
2. Mahasiswa dapat menggunakan operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian matrik
3. Mahasiswa dapat merubah persamaan linier menjadi persamaan matrik.
4. Mahasiswa dapat menyelesaikan metoda invers
5. Mahasiswa dapat menggunakan metoda eliminasi gauss

A. Pendahuluan

Seperti yang dijelaskan sebelumnya bahwa matrik merupakan induk materi dari determinan. Banyak penjelasan memasukan materi determinan didalam matrik. Karena cakupan materi terlalu luas dikaji, maka dipisahkan kajiannya dalam dua pokok bahasan.

Matrik adalah himpunan bilangan real atau bilangan komplek yang tersusun berdasarkan baris dan kolom. Baris adalah bagian yang horizontal, kolom meruapakan bagian yang vertikal. Matrik dinamakan juga dengan array atau larik. Matrik disusun berdasarkan jumlah kolom dan baris lebih sering disebut dengan ordo (mxn). m merupakan jumlah baris dan n adalah jumlah kolom.

Matik memiliki notasi yang berbeda dengan determinan. Garis pembatas sedikit disikukan

Contoh

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrik ini memiliki ordo } (3 \times 4)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ matrik ordo } (4 \times 1)$$

Latihan 1

Tentukan ordo matrik berikut,

$$1. \begin{bmatrix} 3 & 2 & -8 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ -9 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ -8 & 2 & 2 & 8 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 8 & -9 & 0 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B. Operai matematis pada matrik

a Penjumlahan dan pengurangan

Ada berapa persyaratan yang harus dipenuhi

- kedua matrik harus memiliki ordo yang sama
- proses penjumlahan/pengurangan harus pada posisi yang sama
- hasil penjumlahan/pengurangan harus memiliki matrik dengan ordo yang sama

contoh

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \\ -6 & -9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c = a + b$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \\ -6 & -9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & -6 \\ 1 & -6 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

tentukan ,

$$d = a - b$$

$$d = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \\ -6 & -9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 4 \\ 13 & 12 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

b Perkalian

Perkalian matrik ada dua bagian yaitu :

- a. perkalian matrik dengan matrik

Ada berapa persyaratan yang harus dipenuhi

- Jumlah kolom matrik I sama dengan jumlah baris matrik II
- hasil perkalian memiliki ordo (jumlah baris matrik I x jumlah kolom matrik II)
- prosesnya baris kali kolom kemudian dijumlahkan

contoh

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ ordo } (2 \times 3)$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ ordo } (3 \times 2)$$

$$c = a \times b$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

bisakah diterka ordo berapakah matrik yang dihasilkan ?

$$c = \begin{bmatrix} 6+1+(-9) & 6+1+(-9) \\ 10+2-3 & 10+2-3 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \text{ ordo } (2 \times 2)$$

d = a x b (apa yang terjadi ? berikan alasan)

b. perkalian matrik dengan skalar

Ada berapa persyaratan yang harus dipenuhi

- hanya satu matrik yang dikalikan dengan bilangan skalar (satu atau banyak bilangan)
- Perkalian skalar dilakukan pada masing-masing komponen matrik
- Hasil perkalian memiliki ordo yang sama dengan matrik asal

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = 3.A$$

$$B = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Latihan 2

Selesaikanlah

1. jumlahkanlah

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -10 & 4 \\ 5 & -5 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -2 \\ 3 & -5 \\ 4 & -8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

- C = a+b

- D = b+a

2. kurangkanlah berdasarkan soal diatas

- C = a-b

- D = b-a

3. kalikanlah

$$a = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 3 \\ -7 & 2 & 2 \\ -4 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 5 & -5 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 3 & 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

c = a.b

4. kalikan matrik dengan nilai skalar

a. 6.
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 3 \\ -7 & 2 & 2 \\ -4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

b. 4.
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 5 & -5 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 3 & 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

c. 2.5.4.
$$\begin{bmatrix} 2 & 1/6 & 5/4 \\ 4/7 & 4 & 9 \\ -9/6 & 4 & 4/9 \end{bmatrix}$$

C. Metoda Invers Matrik

Invers matrik adalah matrik balikan yaitu hasil invers dikalikan dengan matrik asala akan menghasilkan matrik I . matrik I sering juga disebut dengan matrik satuan yaitu matrik yang diagonal dari kiri-atas ke kanan bawah memilki nilai 1, dan selainya adalah 0

Contoh.

$$\text{Matri I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ada beberapa proses yang harus dilewati,

5. transpose matrik
6. adjoin matrik

7. Invers matrik

Transpose matrik

Yaitu anggota-anggota matrik dipindahkan posisinya, baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Adjoin matrik bujur sangkar.

Sama dengan kofaktor pada determinan

Invers Matrik

Prosesnya adalah

1. Buatlah kofaktor semua elemen matrik bujur sangkar A menjadi matrik kofaktor (C)
2. Tranposekan matrik kofaktor C^t
3. Cari determinan matrik A
4. dapatkan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t$$

Latihan 2

Selesaikanlah
Invers dari matrik berikut ini,

a.
$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & -5 \\ 4 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

penyelesaian persamaan linier (linier) dengan menggunakan metoda invers matrik.

Seperti yang dikemukakan diatas bahwa matrik invers apabila dikalikan dengan matrik asal akan menghasilkan matrik satuan. Sifat dari matrik satuan sama dengan angka 1 pada bilangan desimal. Pada bilangan desimal suatu angka yang dikalikan dengan satu maka hasilnya sama dengan bilangan itu sendiri. Demikian juga dengna matrik satuan, bila dikalikan dengan matrik lain maka hasilnya sama dengan matrik itu sendiri.

Matrik A dikalikan dengan matrik variable x hasilnya sama dengan matik b
Sehingga

$$A \cdot x = b \dots\dots\dots$$

Jika masing masing ruas dikalikan dengan matrik invers A atau A^{-1}

$$A^{-1} A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$I \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

D. Metoda Eliminasi Gauss

Metoda eliminasi gauss sedikit berbeda dengan metoda invers. Metoda eliminasi gauss memanfaatkan matrik untuk mengkonversi bentuk persamaan menjadi sederhana untuk diselesaikan. Metoda eliminasi gauss memiliki kemampuan untuk membuat persamaan baru yang dapat dengan mudah untuk dileliminasikan tanpa menggunakan konsep determinan.

Konsep dasar dari metode eliminasi gauss adalah membuat nilai-nilai diatas atau dibawah diagonal memiliki anggota bernilai nol. Sebelum lebih jauh mengenali cara penggunaan metoda eliminasi gauss terlebih dahulu kita bahas sifat-sifat dasar matrik.

- Matrik tidak mengalami perubahan nilai bila salah satu kolom atau salah satu baris dikalikan dengan konstanta

Contoh :

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k1.a11 & k1.a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k2.a11 & a12 \\ k2.a21 & a22 \end{bmatrix}$$

- Matrik tidak mengalami perubahan nilai bila salah satu kolom ditambahkan atau dikurangkan dengan kelipatan kolom yang lain. Demikian juga pada baris memiliki ketentuan yang sama dengan kolom.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11 + ka12 & a12 \\ a21 + ka22 & a22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11 - ka21 & a12 - ka22 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan sifat tersebut dapat diselesaikan metoda eliminasi gauss

Sifat eliminasi gauss adalah sebagai berikut

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminasi gauss adalah dengan menggunakan kedua sifat diatas maka persamaan tersebut dimanipulasi. Caranya dengan menjadikan nol beberapa kaomponen. Ada dua bentuk setelah dinolkan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & d_3 \end{bmatrix} \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & e_1 \\ 0 & d_{22} & d_{23} & e_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & e_3 \end{bmatrix}$$

Kemudian hasilnya dikembalikan ke bentuk awal

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

artinya bentuk diatas sudah kembali kebentuk awal yaitu $A \cdot x = b$
 Kemudian bentuk matrik dikembalikan kedalam persamaan liner sehingga diperoleh

$$c_{13}.x_1 = d_1$$

$$c_{22}.x_2 + c_{23}.x_3 = d_2$$

$$c_{31}.x_1 + c_{32}.x_2 + c_{33}.x_3 = d_3$$

Latihan 3

Selesaikanlah

Dengan menggunakan metoda invers dan metoda gauss

$$a. \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$b. \begin{bmatrix} 13 & -3 & -2 \\ 8 & 2 & -5 \\ 4 & -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & -3x + 4y - 3z = 12 \\ \text{c.} \quad & 9x - 4z + 3y = 42 \\ & -8x + 2y + 12z = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5x + 3y - 5z = 10 \\ \text{d.} \quad & 2x - 7z + 4y = -7 \\ & 4x + 5y + 9z = 15 \end{aligned}$$