Materi XII

Integral Lanjutan

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat memahami menyelesiakan persamaan integral yang lebih kompleks
2. Mahasiswa mampunyelesiakan persamaan yang lebih rumit
3. Mahasiswa mengimplementasikan konsep integral pada teknik listrik

1. Tinjaulah integral $\int \frac{dz}{z^2 - a^2}$

Dari pembahasan kita tentang program integrasi bagain 1, kita ketahui bahwa penyebutnya dapat difaktorkan dan karena itu fugnsi tersebut dapat dinyatakan dalam pecahan parsialnya.

$$\frac{1}{z^2 - A^2} \equiv \frac{1}{(Z-A)(A+A)} \equiv \frac{P}{Z-A} + \frac{Q}{Z+A}$$

dimana P dan Q adalah konstanta

$\therefore 1 \equiv P(A+Z) + +Q(A-Z)$

Ambillah Z = A $\quad \therefore 1 = P(2A) + Q(0) \quad P = \frac{1}{2A}$

Ambillah Z = - A $\quad \therefore 1 = P(0) + Q(-A) \quad Q = -\frac{1}{2A}$

$$\therefore \frac{1}{Z^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \cdot \frac{1}{A-A} - \frac{1}{2A} \cdot \frac{1}{Z+A}$$

$$\therefore \int \frac{1}{Z^2 - A^2} dZ = \frac{1}{2A} \int \frac{1}{Z-A} dZ - \frac{1}{2A} \int \frac{1}{Z+A} dZ$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.

$$\int \frac{dz}{Z^2 - A^2} dZ = \frac{1}{2A} . \ln(Z-A) - \frac{1}{2A} . \ln(Z+A) + C$$

$$= \frac{1}{2A}.\ln.\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\}+C$$

ini dalah hasil pertama dari sembilan hasil baku yang akan kita turunkan dalam program ini. Ada baiknya hal ini dihafalkan, supaya kita tidak usah lagi mengulangi pekerjaan dalam tiap contoh secara terperinci, seperti akan anda lihat nanti.

Kita ketahui $\int \frac{1}{Z^2 = A^2}dZ = \frac{1}{2A}\ln\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\}+C$

$$\therefore \int \frac{1}{Z^2-16}dZ = \int \frac{1}{Z^2-4}dZ = \frac{1}{8}\ln\left\{\frac{Z-4}{Z+4}\right\}+C$$

dan

$$\int \frac{1}{x^3-5}dx = \int \frac{1}{x^3-(\sqrt{5})^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left\{\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right\}+C$$

(ingat, 5 selalu dapat dituliskan sebagai kuadrat dari akarnya).

Jadi

$$\int \frac{1}{Z^2-A^2}dZ = \frac{1}{2A}\ln\left\{\frac{Z-S}{Z+A}\right\}+C\text{.................. (i)}$$

3. Kita punyai $\int \frac{1}{Z^2-A^2}dZ = \frac{1}{2A}\ln\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\}+C$

Sehingga :

$$\int \frac{dZ}{Z^2-25} = \text{....................}$$

$$\int \frac{dZ}{Z^2-7} = \text{.......................}$$

4.

$$\int \frac{dZ}{Z^2-5^2} = \int \frac{dZ}{Z^2-5^2} = \frac{1}{10}\ln.\left\{\frac{Z-5}{Z+5}\right\}+C$$

$$\int \frac{dZ}{Z^2-7^2} = \int \frac{dZ}{Z^2-7^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln.\left\{\frac{Z-7}{Z+7}\right\}+C$$

Sekarang bagaimanakah dengan yang ini ?

$$\int \frac{1}{x^2+4x+2}\,dx$$

Sekilas tampaknya bentuk ini tidak ada hubungannya dengan bentuk baku ataupun contoh-contoh yang pernah kita kerjakan sampai saat ini, tatapi cobalah kita tuliskan penyebutnya sebagai berikutnya :

$x^2 + 4x + = x^2 + 4x \ \ +2$ (tidak ada salahnya dituliskan demikian!)

Sekarang dua suku yang pertama kita lengkapi agar menjadi bentuk kuarat, yaitu dengan menambahkan kuadrat dari setengah koefisien x

$$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 2^2 + 2$$

dan tentu saja harus kita kurangi lagi dengan bilangan yang sama, yaitu 4, agar identitas tersebut tetap betul.

$$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 2^2 + 2 - 4$$
$$= (x+2)^2 - 2$$

jadi $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+2}\,dx$

dapat dituliskan sebagai $\displaystyle\int \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\,dx$

5. $$\int \frac{1}{x^2+4x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2-2}\,dx$$

Kita boleh menuliskan konstanta 2 sebagai kuadart dari akhir dari akar, sehingga.

$$\therefore \int \frac{1}{x^2+4x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2-(\sqrt{2})^2}\,dx$$

Anda lihat bahwa bentuk integral semula sekarang telah diubah menjadi bentuk $\displaystyle\int \frac{1}{Z^2-A^2}\,dz,$ dalam hal ini Z = (x + A) dan A = $\sqrt{2}$? Bentuk baku menyatakan bahwa

$$\int \frac{1}{Z^2-A^2}\,dx = \frac{1}{2A}\ln\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\} + C$$

Substitusikan pernyataan Z dan A kedalam hasil ini memberikan.

$$\int \frac{1}{x^2+4x+2}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2-(\sqrt{2})^2}dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\{\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right\}+C$$

Sekali telah kita peroleh pernyataan khusus untuk Z dan A, selanjutnya tinggal mensubstitusi pernyataan ini kedalam hasilnya bakunya.

6. Kita lihat sebuah contoh lain.

$$\int \frac{1}{x^2+6x+4}dx$$

Pertama-tama lengkapilah dua suku pertama penyebutnya agar menjadi bentuk kuadrat dan kemudian kurangi dengan bilangan yang sama.

$$\begin{aligned} x^2+6x+4 &= x^2+6x \qquad +4 \\ &= x^2+6x+3^2+4-9 \\ &= (x+3)^2-5 \\ &= (x+3)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \end{aligned}$$

Sehingga $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+4}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}dx$

$= \text{.........................}$

7. $$\int \frac{1}{x^2+6x+4}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln.\frac{x+3-\sqrt{5}}{x-3+\sqrt{5}}+C$$

Yang ini untuk anda sendiri:

Tentukanlah $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-10x+18}dx$

8. $$\int \frac{1}{x^2-10x+18}dx = \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln.\frac{x-5-\sqrt{7}}{x-5+\sqrt{7}}+C$$

Karena $\quad x^2-10x+18 = x^2-10x \quad +18$

$= x^2-10x+5^2+18-25$

$= (x-5)^2-7$

$$= (x-5)^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 10x + 18} dx = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln . \frac{x - 5 - \sqrt{7}}{x - 5 + \sqrt{7}} + C$$

9. Sekarang bagaimana dengan yang ini ? $\int \frac{1}{5x^2 - 2x - 4} dx$

Agar dapat dijadikan kuadrat seperti sebelumnya, koefisien x^2 harus sama dengan 1. Karena itu kita keluarkan faktor 5 dari penyebutnya supaya suku kuadartnya menjadi hanya x^2

$$\therefore \int \frac{1}{5x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}} dx$$

Selanjutnya dapat kita teruskan seperti contoh-contoh sebelumnya.

$$x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{4}{5} = x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$$

$$= x^2 - \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^1 - \frac{4}{5} - \frac{1}{25}$$

$$= \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{21}{25}$$

$$= \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2$$

$$\therefore \int \frac{1}{5x^2 - 2x + 4} dx = \text{.....................}$$

(Jangan lupa faktor 1/5 didepanya)

10.

$$\therefore \int \frac{1}{5x^2 - 2x + 4} dx = \frac{1}{2\sqrt{21}} \ln \left\{ \frac{5x - 1 - \sqrt{21}}{5x - 1 + \sqrt{21}} \right\} + C$$

Inilah penyelesaiannya secara terperinci : ikutilah !

$$\int \frac{1}{5x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2} + C$$

$$= \frac{1}{5} . \frac{5}{2\sqrt{21}} \ln . \left\{ \frac{5x - 1 - \sqrt{21/5}}{5x - 1 + \sqrt{21/5}} \right\} + C$$

II. Dengan cara yang sama, marilah kita nemtik hasil baku yang kedua

dengan meninjau. $\int \frac{dZ}{A^2 - Z^2}$

Bentuk ini mirip dengan yang tadi, karena itu dapat dipecahkan lagi dengan menggunakan pecahan parsial.
Kerjakanlah sendiri dan carilah hasil umumnya.

11. $$\int \frac{dZ}{A^2 - Z^2} = \frac{1}{2A} \ln \left\{ \frac{A + Z}{A - Z} \right\} + C$$

Karena ; $\frac{1}{A2 - Z2} = \frac{1}{(A - Z)(A + Z)} = \frac{P}{A - Z} + \frac{Q}{A + Z}$

$1 = P\ (A + Z) + Q\ (A - Z)$

Ambillah $Z = A$ $\quad 1 = P(2A) + Q(0)$ $\quad P = \frac{1}{2A}$

Ambillah $Z = - A$ $\quad 1 = P(0) + Q\ (2A)$ $\quad Q = - \frac{1}{2A}$

$$\therefore \int \frac{1}{A^2 - Z^2} dZ = \frac{1}{2A} . \int \frac{1}{A + Z} dZ - \frac{1}{2A} \int \frac{1}{A - Z} dz$$

$$= \frac{1}{2A} . \ln(A + Z) - \frac{1}{2A} . \ln(A - Z) + C$$

$$\therefore \int \frac{1}{A^2 - Z^2} dZ = \frac{1}{2A} \ln \left\{ \frac{A + Z}{A - Z} \right\} + C$$

………………. (ii)

Salinlah bentuk baku kedua ini kedalam buku catatan anda dan bandingkanlah dengan hasil yang pertama. Keduanya sangat mirip bentuknya.

12. Jadi kita memiliki $\therefore \int \frac{1}{A^2 - Z^2} dZ = \frac{1}{2A} \ln\left\{\frac{A+Z}{A-Z}\right\} + C$

$$\int \frac{1}{Z^2 - A^2} dZ = \frac{1}{2A} \ln\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\} + C$$

Perhatikan bertapa miripnya kedua hal ini.
Sekarang marilah kita lihat beberapa contoh untuk bentuk baku kedua ini.

Contoh 1. $\int \frac{1}{9 - x^2} dx = \int \frac{1}{3^2 + x^2} dx = \frac{1}{6} \ln\left\{\frac{3+x}{3-x}\right\} + C$

Contoh 2.

$$\int \frac{1}{5 - x^2} dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{5}} . \ln\left\{\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right\} + C$$

Contoh 3. $\int \frac{1}{3 - x^2} dx = ...$

13. $$\frac{1}{2\sqrt{3}} . \ln\left\{\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right\} + C$$

Contoh 4. $\int \frac{1}{3 + 6x - x^2} dx =$

Kita lengkapi lagi penyebutnya agar muncul bentuk kuadrat seperti sebelumnya, tetapi kita harus berhati-hati dengan tandanya - dan jangan lupa pula bahwa koefisien x^2 harus sama dengan 1. Jadi kita lakukan seperti berikut :

$$3 + 6x - x^2 = 3 - (x^2 - 6x)$$

Perhatikan, kita tulliskan suku x^2 dan suku x dalam kurung dengan tanda minus diluarnya; tentu saja 6x menjadi – 6x didalam kurung. Sekarang kita dapat melengkapi bentuk kuadrat di dalam kurung dan kita tambahkan bilangan yang sama di luarnya (karena semua yang di dalam kurung memiliki tanda negatif didepannya).

Jadi $3 + 6x - x^2 = 3 - (x^2 - 6x + 3^2) + 9$

$= 12 - (x - 3)^2$
$= (2\sqrt{3})^2 - (x - 3)^2$

dalam hal ini, A = $2\sqrt{3}$ dan Z = (x – 3)

$$\therefore \int \frac{1}{3+6x-x^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - (x-3)^2}$$

= ....

14. $$\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln\left\{\frac{2\sqrt{3}+x-3}{2\sqrt{3}-x+3}\right\} + C$$

Contoh lain yang sejenis :

Contoh 5. $$\int \frac{1}{9-4x-x^2}\,dx$$

Pertama-tama kita lakukan dahulu langkah 'melengkapi bentuk kuadrat' yang biasa.

$9 - 4x - x^2 = 9 - (x^2 + 4x\quad)$
$= 9 - (x^2 + 4x + 2^2) + 4$
$= 13 - (x + 2)^2$
$= (\sqrt{13})^2 - (x + 2)^2$

dalam hal ini A = $\sqrt{13}$ dan Z = $(x + 2)^2$

kita ketahui bahwa $\therefore \int \frac{1}{A^2 - Z^2}\,dZ = \frac{1}{2A} \ln\left\{\frac{A+Z}{A-Z}\right\} + C$

Sehingga dalam contoh ini $\int \frac{1}{9-4x-x^2}\,dx$ = ...

15. $$\frac{1}{2\sqrt{13}} \ln.\left\{\frac{\sqrt{13}+x+2}{\sqrt{13}-x-2}\right\} + C$$

Contoh 6. $$\int \frac{1}{5+4x-2x^2}\,dx$$

Ingat bahwa kita harus menyingkirkan dahulu faktor 2 dari penyebutnya agar koefisien x^2 menjadi 1.

$$\int \frac{1}{5+4x-2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{5}{2}+2x-x^2}\,dx$$

Selanjutnya kita garap seperti biasa

$$\frac{5}{2}+2x-x^2=\frac{5}{2}-\left(x^2-2x\right)$$

$$=\frac{5}{2}-\left(x^2-2x+1^2\right)+1$$

$$=\frac{7}{2}-(x-1)^2$$

$$=\left(\sqrt{3,5}\right)^2-(x-1)^2$$

$$\therefore\int\frac{1}{5+4x-2x^2}dx=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(Jangan lupa faktor 2 yang kita keluarkan dari penyebutnya tadi).

16. $\frac{1}{4\sqrt{3,5}}\,\mathrm{In}\left\{\frac{\sqrt{3,5}+x-1}{\sqrt{3,5}-x+1}\right\}+c$

Benar ! sekarang cobalah satu lagi.

Contoh 7. tentukanlah $\int\frac{1}{6-6x-5x^2}dx$

Apakah yang pertama- tama harus kita lakukan?

17. Mengubah koefisien x^2 menjadi 1,

Yaitu dengan mengeluarkan faktor 5 dari penyebutnya

Tepat! Marilah kita melakukannya.

$$\int\frac{1}{6-6x-5x^2}dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\frac{6}{5}-\frac{6}{5}x-x^2}dx$$

sekarang anda dapat melengkapi bentuk kuadratnya seperti biasa dan kemudian selesaikanlah.

18. $\int\frac{1}{6-6x-5x^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{39}}\,\mathrm{In}\left\{\frac{\sqrt{39}+5x+3}{\sqrt{39}-5x-3}\right\}+c$

$$\int \frac{1}{6-6x-5x^2}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{6}{5}-\frac{6}{5}x-x^2}dx$$

$$\frac{6}{5}-\frac{6}{5}x-x^2 = \frac{6}{5}-\left(x^2+\frac{6}{5}x\right)$$

Karena: $= \frac{6}{5}-\left\{x^2+\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}+\frac{9}{25}$

$$= \frac{39}{25}-\left(x+\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{39}}{5}\right)^2-\left(x+\frac{3}{5}\right)^2$$

Sehingga A = $\frac{\sqrt{39}}{5} \text{dan} Z = \left(x+\frac{3}{5}\right)$

Sekarang

$$\int \frac{1}{A^2-Z^2}dZ = \frac{1}{2A}\text{In}\left\{\frac{A+Z}{A-Z}\right\}+c$$

$$\therefore \int \frac{1}{6x-6x-x^2}dx = \frac{1}{5.}\frac{1}{\frac{2\sqrt{39}}{5}}\text{In}\left\{\frac{\sqrt{39}/5+x+3/5}{\sqrt{39}/5-x-3/5}\right\}+c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{39}}\text{In}\left\{\frac{\sqrt{39}+5x+3}{\sqrt{39}-5x-3}\right\}+c$$

19. Sebagai ulangan, tutuplah catatan anda dan lengkapilah integral yang berikut. Jangan melakukan langkah- langkahnya secara lengkap, cukup menuliskan hasilnya saja.

(i) $\int \frac{dZ}{Z^2 - A^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) $\int \frac{dZ}{A^2 - Z^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

20.

$$\int \frac{dZ}{Z^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \ln\left\{\frac{Z - A}{Z + A}\right\} + c$$

$$\int \frac{dZ}{A^2 - Z^2} = \frac{1}{2A} \ln\left\{\frac{A + Z}{A - Z}\right\} + c$$

III. Sekarang kita tinjau bentuk baku yang ketiga.

Tinjaulah $\int \frac{dZ}{Z^2 + A^2}$

Di sini penyebutnya tidak dapat difaktorkan, karena itu kita tidak dapat menerapkan kaidah pecahan parsial. Untuk mengatasinya, kita akan melakukan substitusi, yaitu kita mencoba mencari subtitusi untuk Z agar integralnya dapat dituliskan dalam bentuk yang kita tahu bahwa kita dapat menanganinya.

Misalnya kita cobakan $Z = A \tan\theta$

Maka $Z^2 + A^2 = A^2 \tan^2\theta + A^2 = A^2\left(1 + \tan^2\theta\right) = A^2 \sec^2\theta$

Dan juga $\frac{dZ}{d\theta} = A\sec^2\theta$ yaitu $dZ \equiv A\sec^2\theta d\theta$

Sekarang integralnya menjadi

$$\int \frac{1}{Z^2 + A^2} dZ = \int \frac{1}{A^2 \sec^2\theta} . A\sec^2\theta d\theta = \int \frac{1}{A} d\theta$$

$$= \frac{1}{A} . \theta + c$$

bentuk hasil ini baik dan sederhana, tetapi kita tidak dapat membiarkannya seperti itu, karena θ adalah variabel baru yang kita ketengahkan ditengah perjalanan penyelesaiannya. Kita harus menyatakan kembali θ ke dalam variabel Z semula.

$Z = A \tan\theta$

$\therefore \frac{Z}{A} \tan\theta \qquad \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{Z}{A}$

$$\therefore \int \frac{1}{Z^2 + A^2} dx = \frac{1}{A} \tan^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + C$$

…………………… (iii)

Tambahkanlah hasil ini kedalam daftar baku yang telah anda miliki

21. $$\therefore \int \frac{1}{Z^2 + A^2} dx = \frac{1}{A} \tan^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + C$$

Contoh 1. $\int \frac{1}{x^2 + 16} dx = \int \frac{1}{x^2 + 4^2} dx = \frac{1}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$

Contoh 2. $\int \frac{1}{x^2 + 10x + 30} dx$

Seperti biasa, kita lengkapi bentuk kuadrat dalam penyebutny.

$$\begin{aligned} x^2 = + 10x + 30 &= x^2 + 10x + 30 \\ &= x^2 + 10x + 5^2 + 30 - 25 \\ &= (x + 5)^2 + 5 \\ &= (x + 5)^2 + (\sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2 + 10x + 30} dx = \int \frac{1}{(x + 5)^2 + (\sqrt{5})^2} dx$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

22. $$\frac{1}{\sqrt{5}.} . \tan^{-1}\left(\frac{x + 5}{\sqrt{5}}\right) + 5$$

Sekali anda telah mengenal bentuk bakunya, anda tinggal mencari pernyataan untuk Z dan A dalam suatu contoh dan kemudian mensubstitusikannya ke dalam hasil baku tersebut. Nah, demikianlah! Sekarang cobalah anda kerjakan sendiri yang berikut ini.

Contoh 3. Tentukanlah $\int \frac{1}{2x^2 + 12x + 32} dx$

Ambillah waktu secukupnya. Ingatlah akan aturan-aturan yang telah kita gunakan, tentu anda tidak akan tersesat.

23. $$\int \frac{1}{2x^2+12x+32}dx = \frac{1}{2\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$$

Periksalah pekerjaan anda.

$$\int \frac{1}{2x^2+12+32}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+6x+16}dx$$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 16 &= x^2 + 6x \qquad + 16 \\ &= x^2 + 6x + 3^2 + 16 - 9 \\ &= (x+3)^2 + 7 \\ &= (x+3)^2 + (\sqrt{7})^2 \end{aligned}$$

Sehingga $Z = (x + 3)$ dan $A = \sqrt{7}$

$$\int \frac{1}{Z^2+A^2}dZ = \frac{1}{A}\tan^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\}+C$$

$$\therefore \int \frac{1}{2x^2+12+32}dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$$

24. IV. Sekarang marilah kita bahas integral yang lain

$$\int \frac{1}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}dZ$$

Jelaslah kita dapat menggunakan pecahan parsial karena adanya tanda akar. Karena itu kita harus mencari substitusi yang sesuai.

Ambillah $\qquad Z = A \sin\theta$

Maka $\qquad A^2 - Z^2 = A^2 - A^2 \sin^2\theta = A^2(1 - \sin^2\theta) = A^2\cos^2\theta$

$$\sqrt{\left(A^2-Z^2\right)} = A\cos\theta$$

dan juga $\qquad \dfrac{dZ}{d\theta} = A\cos\theta \qquad \therefore dZ = A\cos\theta.d\theta$

sehingga integralnya sekarang menjadi

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(A^2-Z^2\right)}}dZ = \int \frac{1}{A\cos\theta}.A\cos\theta.d\theta = \int d\theta = \theta + C$$

Nyatakan kembali θ dalam variabel semula.

$Z = A \sin\theta \qquad \therefore \sin\theta = \dfrac{Z}{A} \qquad \therefore \theta = \sin^{-1}\dfrac{Z}{A}$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}} dZ = \sin^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

Ini adalah bentuk baku yang berikutnya, karena itu tambahkanlah hasil ini.

25. $$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}} dZ = \sin^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

Contoh 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(25 - x^2\right)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(25 - x^2\right)}} dx = \sin^{-1}\left\{\frac{x}{25}\right\} + C$$

Contoh 2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(3 - 2x - x^2\right)}} dx$

Seperti biasa $3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x \quad)$

$= 3 - (x^2 + 2x + 1^2) + 1$

$= 4 - (x + 1)^2$

$= 2^2 - (x + 1)^2$

Jadi dalam hal ini $A = 2$ dan $Z = (x + 1)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(3 - 2x - x^2\right)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(2^2 - (x+1)^2\right)}} dx$$

Serupa $\qquad = \sin{-1}\left\{\dfrac{x+1}{2}\right\} + C$

Contoh 3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(5 - 4x - x^2\right)}} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

26. $$\int \frac{1}{\sqrt{\left(5 - 4x - x^2\right)}} dx = \sin^{-1}\left\{\frac{x+2}{3}\right\} + C$$

Karena : $5 - 4x - x^2 = 5 - (x^2 + 4x \quad)$

$= 5 - (x^2 + 4x + 2^2) + 4$

$= 9 - (x + 2)^2$
$= 3^2 - (x + 2)^2$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{\left(5 - 4x - x^2\right)}} dx = \sin{-1} \left\{ \frac{x + 2}{3} \right\} + C$$

Sekarang cobalah yang ini.

Contoh 4. Tentukanlah $\int \frac{1}{\sqrt{\left(14 - 12x - 2x^2\right)}} dx$

Sebelum kita lengkapi bentuk kuadratnya, harus kita ubah dahulu koefisien x^2 menjadi 1, yaitu kita harus mengeluarkan faktor 2 dari pernyataan $14 - 12x - 2x^2$, tetapi ingat, bila dipisahkan dari tanda akar faktor ini menjadi $\sqrt{2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(14 - 12x - 2x^2\right)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(7 - 6x - x^2\right)}} dx$$

Selesaikanlah soal ini seperti contoh sebelumnya.

27. $$\int \frac{1}{\sqrt{\left(14 - 12x - 2x^2\right)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left\{ \frac{x + 3}{4} \right\} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(14 - 12x - 2x^2\right)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(7 - 6x - x^2\right)}} dx$$

$7 - 6x - x^{-2} = 7 - (x^2 + 6x\ \ )$
$= 7 - (x^2 + 6x + 3^2) + 9$
$= 16 - (x + 3)^2$
$= 4^2 - (x + 3)^2$

Sehingga A = 4 dan Z = (x + 3)

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}} dZ = \sin^{-1} \left\{ \frac{Z}{A} \right\} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(14 - 12x - 2x^2\right)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left\{ \frac{x + 3}{4} \right\} + C$$

28. V. Sekarang marilah kita lihat integral baku selanjutnya dengan cara yang sama.

Menentukan $\int \frac{dZ}{\sqrt{(Z^2 + A^2)}}$ sekali lagi kita cari substitusi yang sesuai untu kZ. Ternyata tidak ada substitusi trigonometri yang dapat mengubah bentuknya menjdai bentuk yang dapat kita tangani.

Barangkali kita harus beralih ke identitas hiperbolik. Kita coba Z = A sinh θ.

Maka $Z^2 + A^2 = A^2 \sinh^2 \theta + A^2 = A^2 (\sinh^2 \theta + 1)$

Mengingat $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ $\quad \cosh^2 \theta = \sinh^2 \theta + 1$

$$Z^2 + A^2 = A^2 \cosh^2 \theta$$

$$\sqrt{(Z^2 + A^2)} = A \cosh \theta$$

Juga $\frac{dZ}{d\theta} = A \cosh \theta \qquad \therefore dZ = A \cosh \theta . d\theta$

Sehingga

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{(Z^2 + A^2)}} = \int \frac{1}{A \cosh \theta} . A \cosh \theta . d\theta = \int d\theta = \theta + C$$

Tetapi $\quad Z = A \sinh \theta$

$\sinh \theta = \frac{Z}{A} \qquad \therefore \theta = \sinh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\}$

$$\therefore \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z^2 + A^2)}} = \sinh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

……………….(v)

Salinlah hasil ini ke dalam buku catatan anda untuk rujukan nati.

Jadi $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 4)}} dx = ...$

29. $$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 4)}} dx = \sinh^{-1}\left\{\frac{x}{2}\right\} + C$$

Sekali lagi, yang harus kita lakukan hanyalah mencari pernyataan untuk Z dan A dalam suatu contoh dan kemudian mensubstitusikanya ke dalam bentuk baku.

Ssekarang cobalah anda kerjakan sendiri yang berikut ini.

Tentukanlah $\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+5x+12\right)}}dx$

30. $$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+5x+12\right)}}dx = \sinh^{-1}\left\{\frac{2x+5}{\sqrt{23}}\right\}+C$$

Inilah penyelesaiannya secara terperinci.

$$x^2 + 5x + 12 = x^2 + 5x \qquad +12$$

$$= x^2 + 5x \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 12 - \frac{25}{4}$$

$$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$$

$$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2$$

Sehingga $Z = x + \frac{5}{2}$ dan $A = \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+5x+12\right)}}dx = \sinh^{-1}\left\{\frac{2x+\frac{5}{2}}{\sqrt{23/2}}\right\}+C$$

$$= \sin^{-1}\left\{\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right\}+C$$

Cobalah satu lagi

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(2x^2+8x+15\right)}}dx = \text{....................}$$

31. $$\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left\{\frac{(x+2)\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right\}+C$$

Inilah pengerjaannya :

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(2x^2+8x+15\right)}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+4x+\frac{15}{2}\right)}}dx$$

$$x^2 + 4x + \frac{15}{2} = x^2 + 4x \quad + \frac{15}{2}$$

$$= x^2 + 4x + 2^2 + \frac{15}{2} - 4$$

$$= (x+2)^2 + \frac{7}{2}$$

$$= (x+2)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2$$

Sehingga Z = (x + 2) dan A = $\sqrt{\frac{7}{2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(2x^2+8x+15\right)}}dx = \sinh^{-1}\left\{\frac{x+2}{\sqrt{\frac{7}{2}}}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left\{\frac{(x+2)\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right\} + C$$

32. Sekarang kita akan menurunkan hasil baku yang lain.

IV. Tinjaulah $\int \frac{dZ}{\sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}}$

Substitusi yang sesuai di sini adalah Z = A cosh θ

$$Z^2 - A^2 = A^2 \cosh^2\theta - A^2 = A^2(\cosh^2\theta - 1) = A^2\sinh^2\theta$$

$$\therefore \sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)} = A\sinh\theta$$

Juga $\quad Z = A\cosh\theta \quad\quad dZ = A\sinh\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}} = \int \frac{1}{A.\sinh\theta}.\sinh\theta.d\theta = \int d\theta = \theta + C$$

$Z = A \cosh\theta \qquad \cosh\theta = \dfrac{Z}{A} \qquad \theta = \cosh^{-1}$

$\left\{\dfrac{Z}{A}\right\} + C$

$$\therefore \int \frac{dZ}{\sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}} = \cosh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

…………………..(vi)

Ini adalah hasil baku keenam yang telah kita peroleh. Tambahkanlah ini ke dalam daftar anda.

33. $$\therefore \int \frac{dZ}{\sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}} = \cosh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

Contoh 1. $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 - 9\right)}}\,dx = \cosh^{-1}\left\{\frac{x}{3}\right\} + C$

Contoh 2. $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 + 6x + 1\right)}}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Anda dapat menyelesaikannya sendiri. Caranya sama seperti sebelumnya lengkapilah bentuk kuadratnya dan lihatlah apa Z dan A dalam hal ini dan kemudian substitusikanlah ke dalam bentuk bakunya.

34. $$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 + 6x + 1\right)}}\,dx = \cosh^{-1}\left\{\frac{x+3}{2\sqrt{2}}\right\} + C$$

Inilah penyelesaiaannya :

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 1 &= x^2 + 6x \qquad + 1 \\ &= x^2 + 6x + 3^2 + 1 - 9 \\ &= (x+3)^2 - 8 \\ &= (x+3)^2 - (2\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

Sehingga $Z = (x + 3)$ dan $A = 2\sqrt{2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 + 6x + 1\right)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left\{(x+3)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2\right\}}}\,dx$$

$$= \cosh^{-1}\left\{\frac{x+3}{2\sqrt{2}}\right\} + C$$

Sekarang marilah kita kumpulkan dahulu hasil-hasil yang telah kita peroleh sampai saat ini supaya kita dapat membandingkannya.

35. Inilah bentuk-bentuk baku yang telah kita peroleh sampai saat ini. Untuk masing-masing jenis dicantumkan juga cara memperolehnya.

1. $\int \frac{dZ}{Z^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \ln\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\} + C$ Pecahan Parsial

2. $\int \frac{dZ}{A^2 - Z^2} = \frac{1}{2A} \ln\left\{\frac{A+Z}{A-Z}\right\} + C$ Pecahan parsial

3. $\int \frac{dZ}{Z^2 - A^2} = \frac{1}{A} \tan^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$

   Substitusikan Z = A tan θ

4. $\int \frac{dZ}{\sqrt{A^2 - Z^2}} = \sin^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$

   Substitusikan Z = A sin θ

5. $\int \frac{dZ}{\sqrt{A^2 + Z^2}} = \sinh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$

   Substitusikan Z = A sinh θ

6. $\int \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 - A^2}} = \cosh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$

   Substitusikan Z = A cosh θ

Perhatikan bahwa tiga yang pertama membentuk satu kelompok (tanpa akar) dan tiga kelompok terakhir membentuk kelompok lain (dengan akar pada penyebutnya)

Anda harus berupaya untuk menghafalkan keenam hasil ini karena anda perlu mengetahuinya, perlu dapat mengutipnya, dan perlu dapat menggunakannya dalam berbagai contoh persoalan.

36. Barangkali anda masih ingat bahwa dalam program mengenai fungsi hiperbolik kita berjumpa dengan hasil $\sinh^{-1} x = \ln\left\{x + \sqrt{\left(x^2 + 1\right)}\right\}$

$$\therefore \sinh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} = \ln\left\{\frac{Z}{A} + \sqrt{\left(\frac{Z^2}{A^2}+1\right)}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{Z}{A} + \sqrt{\left(\frac{Z^2 + A^2}{A^2}\right)}\right\}$$

$$\sinh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} = \ln\left\{\frac{Z}{A} + \frac{\sqrt{\left(Z^2 + A^2\right)}}{A}\right\}$$

Serupa dengan itu $\cosh - 1\left\{\frac{Z}{A}\right\} = \ln\left\{\frac{Z + \sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}}{A}\right\}$

Hal ini berarti bahwa hasil integral baku 5 da 6 dapat dinyatakan baik dalam bentuk invers fungsi hiperbolik maupun dalam bentuk logaritma, bergantung kepada kebutuhannya.

37. Ketiga bentuk integral baku lain yang belum kita bahas adalah :

7. $\int \sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}.dZ$
8. $\int \sqrt{\left(A^2 + Z^2\right)}.dZ$
9. $\int \sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}.dZ$

Substitusikan yang sesuai untuk masing-masing bentuk sama dengan substitusi yang digunakan ketika bentuk tersebut muncul sebagai penyebut.

Yaitu untuk $\int \sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}.dZ$ Substitusikan Z = A sin θ

$\int \sqrt{\left(A^2 + Z^2\right)}.dZ$ Substitusikan Z = A sinh θ

$\int \sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}.dZ$ Substitusikan Z = A cosh θ

dengan melakukan substitusi tersebut, kita peroleh hasil ;

$$\int \sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}.dZ = \frac{A2}{2}\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z\sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}}{A^2}\right\}$$

$$\int \sqrt{\left(A^2 + Z^2\right)}.dZ = \frac{A2}{2}\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z\sqrt{\left(A^2 + Z^2\right)}}{A^2}\right\}$$

$$\int \sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}.dZ = \frac{A2}{2}\left\{\cosh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z\sqrt{\left(Z^2 - A^2\right)}}{A^2}\right\}$$

Bentuk lebih rumit dan sedikit sulit dihafalkan, tetapi cara penggunaannya tetap sama dengan yang sebelumnya. Salinlah ketiganya.

38. Sekarang marilah kita lihat bagaimana cara memperoleh ketiga hasil diatas

$\int \sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}.dZ$ Substitusikan Z = A sin

$A^2 - Z^2 = A^2 - A^2 \sin^2 \theta = A^2 (1 - \sin^2 \theta) = A^2 \cos^2 \theta$

$\therefore \sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)} = A\cos\theta$ juga $dZ = A \cos \theta \, d\theta$

$$\int \sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}dZ = \int A\cos\theta . A\cos\theta d\theta = A2\int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= A^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right] + C = \frac{A^2}{2}\left\{\theta + \frac{2\sin\theta}{2}\right\} + C$$

Sekarang $\sin \theta = \frac{Z}{A}$ dan $\cos^2 \theta = 1 - \frac{Z^2}{A^2} = \frac{A^2 - Z^2}{A^2}$ $\therefore \cos\theta \frac{\sqrt{\left(A^2 - A^2\right)}}{A}$

$$\int \sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}dZ = \frac{A^2}{2}\left\{\sin^{-1} + \left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z}{A} . \frac{\sqrt{\left(A^2 - Z^2\right)}}{A}\right\}$$

$$= \frac{A2}{Z}\left\{\mathrm{Sin}-1\left(\frac{Z}{A}\right)+\frac{A\sqrt{\left(A^2-Z^2\right)}}{A^2}\right\}+C$$

Dua yang lain dibuktikan dengan cara yang samas.

39. Inilah salah satu contoh penerapannya.

$$\int\sqrt{\left(x^2+4x+13\right)}.dx$$

Pertama-tama lengkapi dahulu bentuk kuadratnya dan carilah bentuk Z dan A seperti sebelumnya. Baik, lakukanlah itu !

40. $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^{2|+} 3^2$

Sehingga dalam hal ini $Z = x + 2$ dan $A = 3$

$$\therefore \int\sqrt{\left(x^2+4x+13\right)}.dx = \int\sqrt{\left\{(x+2)^2+3^2\right\}}dx$$

Ini termsauk dalam bentuk

$$\int\sqrt{\left(x^2+4x+13\right)}.dx = \frac{A^2}{2}\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right)+\frac{Z\sqrt{\left(Z^2+A^2\right)}}{A^2}\right\}+C$$

Jadi, dengan menstubstitusikan pernyataaan Z dan A diatas, kita dapatkan

$$\int\sqrt{\left(x^2+5x+13\right)}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

41.

$$\int\sqrt{\left(x^2+5x+13\right)}dx = \frac{9}{2}\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+\frac{(x+2)\sqrt{\left(x^2+4x+13\right)}}{9}\right\}+C$$

Kita lihat bahwa untuk menggunakan bentuk-bentuk baku ini kita hanya harus melengkapi bentuk kuadratnya – seperto yang telah kita lakukan dalam banyak contoh, mencari pernyataan untuk Z dan A, mensubstitusikannya keduanya kedalam hasil baku yang sesuai. Dengan demikian sakarang anda telah dapat menangani sejumlah besar integral yang barangakali masih diluar jangakauan anda sebelum anda mengikuti program ini.

Sebagai ulangan, lengakapilah integral-intgral yang berikut tanpa melihat kedalam buku catatan anda

(i) $$\int \frac{dZ}{Z^2 - A^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(ii) $$\int \frac{dZ}{A^2 - Z^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(iii) $$\int \frac{dZ}{Z^2 + A^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

42. $$\int \frac{dZ}{Z^2 - A^2} = \frac{1}{2A}.\ln\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\} + C$$

$$\int \frac{dZ}{A^2 - Z^2} = \frac{1}{2A}.\ln\left\{\frac{A+Z}{A-Z}\right\} + C$$

$$\int \frac{dZ}{Z^2 + A^2} = \frac{1}{A}.\tan^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

Sekarang kelompok yang kedua

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{(A^2 - Z^2)}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{(Z^2 + A^2)}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{(Z^2 - A^2)}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

43. $$\int \frac{dZ}{\sqrt{(A^2 - Z^2)}} = \sin^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

$$\int \frac{dZ}{Z^2 + A^2} = \sinh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

$$\int \frac{dZ}{Z^2 - A^2} = \cosh^{-1}\left\{\frac{Z}{A}\right\} + C$$

Barangkali anda belum menghafal dengan kelompok yang ketiga, tatapi baiklah kita tuliskan lagi dan lihatlah kembali.

$$\int \sqrt{(A^2 - Z^2)}.dZ = \frac{A^2}{2}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z\sqrt{(A^2 - Z^2)}}{A^2}\right\}$$

$$\int \sqrt{(Z^2 + A^2)}.dZ = \frac{A^2}{2}\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right) + \frac{Z\sqrt{(Z^2 + A^2)}}{A^2}\right.$$

$$\int \sqrt{(Z^2 - A^2)}.dZ = \frac{A^2}{2}\left\{\left(\frac{Z\sqrt{(Z^2 - A^2)}}{A}\right) - \cosh^{-1}\left(\right.\right.$$

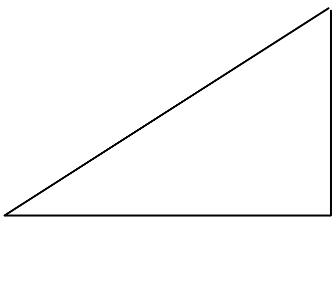
Perhatikan bahwa bagian dibawah tanda akar dalam hasilnya selalu sama dengan bagian bawah tanda akar dalam masing-masing integralnya.

Ini adalah bagian khusus dalam program ini, tatapi masih ada jenis integral lain yang membutuhkan substitusi tertentu. Kita akan membahas satu atau dua macam integral ini sekarang.

44. Integral dalam bentuk $\int \frac{1}{a + b\sin^2 x + \cos^2 x}dx$

Contoh 1. Tinjaulah $\int \frac{1}{3 + \cos^2 x}$, bentuk ini berbeda dari semua integral yang telah kita bahas sebelumnya. Jelas integral ini tidak termasuk kedalam salah satu bentuk baku yang sudah kita kenal.

Kunci untuk bentuk ini adalah mensubstitusikan t = tan x ke dalam integralnya. Memang tan x tidak muncul dalam integral tersebut tetapi jika tan x = t, kita segera dapat mencari pernyataaan untuk tan x dan cos z. kita gambarkan diagramnya, yaitu :



$$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

tan x = t

juga, karena t = tan x, $\frac{dt}{dx}$ = sec^2 x = 1 + tan^2 x = 1 + t^2

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+t^2} \qquad \therefore dx \equiv \frac{dt}{1+t^2}$$

maka 3 + cos^2 x = $3 + \frac{1}{1+t^2} = \frac{3+3t^2+1}{1+t^2} = \frac{4+3t^2}{1+t^2}$

jadi sekarang integralnya menjadi

$$\int \frac{1}{3+\cos^2 x}dx = \int \frac{1+t^2}{4+3t^2}.\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1}{4+3t^2}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}+t^2}$$

Dan menurut apa yang telah kita bahas dalam bagian sebelumnya, hasil integral ini adalah ……………

45.

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}+t^2}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{1}{2/\sqrt{3}}\right\} + C$$

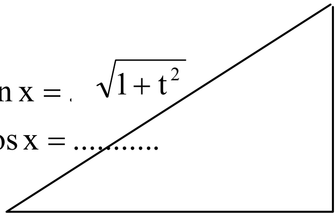
$$= \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\} + C$$

Akhirnya kita harus mengembalikannya ke dalam variable semula dan, karena t = tan x, kita peroleh :

$$\int \frac{1}{3+\cos^2 x}dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}.\tan x}{2}\right\} + C$$

46. $$\int \frac{1}{a + b\sin^2 x + \cos^2 x}\,dx$$

Dalam prakteknya, beberapa koefisiennya mungkin sama dengan nol, sehingga suku yang bersangkutan tidak muncul dalam fungsi, tetapi penyelesaaanya tetap sama.



$\therefore \sin x = .$ $\sqrt{1+t^2}$

$\therefore \cos x = ...$

47.

$$\therefore \sin x = \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}} \qquad \therefore \cos x = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

kita juga harus mengubah variabelnya ;

tan x = x

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}; dax = ...$$

48. $$dx = \frac{dt}{1+t^2}\,]$$

Dengan Perlengkapannya substitusikan ini kita akan dapat menyelesaikan sembarang integral jenis ini. Cara ini tidak memberikan hasil baku, tetapi memperlengkapi kita dengan suatu dara baku.

Amatilah fungsi berikut

Sin x = ……………

Cos x = …………

49.

$$\therefore \sin x = \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}} \qquad \therefore \cos x = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

Baik sekarang kita mulai dengan contonhnya.

Contoh 2. Tentukanlah $\int \frac{1}{2\sin^2 x + 4x\cos^2 x} dx$

Dengan menggunakan substitusi di atas, dan dengan mengigat bahwa $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, kita peroleh;

$$2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = \frac{2t^2}{1+t^2} + \frac{4}{1+t^2} = \frac{2t^2+4}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x + 4x\cos^2 x} dx = \int \frac{1+t^2}{2^{t2}+4} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2} dt$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

50. $$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{t}{\sqrt{2}}\right\} + C$$

Dan karena t = tan x kita dapat kembali ke variable semula, sehingga

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x + 4x\cos^2 x} dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left\{\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right\} + C$$

yang berikut ini untuk anda kerjakan sendiri.

Ingatlah substitusinya :

t = tan x

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

$$dx \equiv \frac{dt}{(1+t^2)}$$

baiklah, inilah soalnya :

contoh 3. $\int \frac{1}{2\cos^2 x + 1} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

51. $$\int \frac{1}{2\cos^2 x + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left\{\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right\} + C$$

Inilah jalannya.

$$2\cos^2 x + 1 = \frac{1}{1+t^2} + 1 = \frac{2+1+t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{3+t^2}{1+t^2}$$

$$\therefore \int \frac{1}{2\cos^2 x + 1} dx = \int \frac{1+t^2}{3+t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1}{3+t2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left\{\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right\} + C$$

Jadi seriap kita berjumpa dengan integral semacam ini, dengan $\sin^2 x$ dan atau $\cos^2 x$ dalam penyebutnya, kecuali penyelesaiannya adalah melakukan substitusikan t = …….

52. t = tan x

Sekarang tinjaulah integral $\int \frac{1}{5+4\cos x}dx$

Jelas ini bukan integral jenis yang lalu karena fungsi trigonometri dalam penyebutnya adalah cos x, bukan $\cos^2 x$

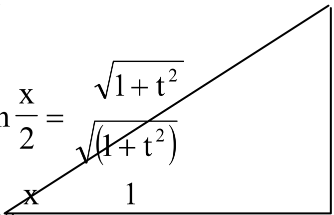
Sesungguhnya ini adalah contoh kelompok integral lain yang akan kita bahas sekarang. Bentuk semuanya adalah $\int \frac{1}{a+b\sin x+c\cos x}dx$, yaitu sinus dan cosinus dalam penyebutnya, tetapi tidak berbentuk kuadart.

53. Integral dalam bentuk $\int \frac{1}{a+b\sin x+c\cos x}dx$

Kali ini kuncinya adalah mensubstitusi t = tan $\frac{x}{2}$

Dari sini kita dapat mmeperoleh pernyataan yang sesuai seperti sebelumnya untuk sin $\frac{x}{2}$ dan cos $\frac{x}{2}$ dengan bantuan diagram sederhana seperti sebelumnya. Tetapi ini juga berarti bahwa kita harus menyatakan sin x dan cos x dalam perbandingan trigonometri setengah sudut – jadi akan ada tambahan pekerjaan sedikit, tetapi hanya sedikit, jangan menyerah dahulu. Pelaksanaannya ternyata jauh lebih mudah dari pada kedengarannya.

Pertama-tama marilah kita bentuk dahulu substitusinya secara terperinci.



$$\therefore \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

$$\therefore \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}$$

tan = $\frac{x}{2}$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2. \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

juga, karena $t = \tan \frac{x}{2}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan_2 \frac{x}{2}\right)$

$$= \frac{1+t^2}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \qquad \therefore dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

jadi kita dapatkan

jika $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ada baiknya substitusikan ini dihafalkan untuk pemakiaan dalam contoh-contoh nanti. Karena itu salinlah ke dalam buku catatan anda untuk rujukan nanti. Sekarang kita telah siap menggunakan nya.

54. Contoh 1. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

Dengan menggunakan substitusi $t = \tan \frac{x}{2}$, kita dapatkan

$$5 + 4 \cos x = 5 + 4 \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$= \frac{5+5t^2+4-4t^2}{1+t^2} = \frac{9+t^2}{1+t^2}$$

$$\because \int \frac{dx}{5+4\cos x} = \int \frac{1+t^2}{9+t^2} \cdots \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{9+t^2}$$

= ……………..

55. $$\frac{2}{3}\tan^{-1}\left\{\frac{t}{3}\right\}+C$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left\{\frac{\tan x/2}{3}\right\}+C$$

contoh lain :

contoh 2. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$

Dengan mengguakan substitusi t = tan $\frac{x}{2}$

$$3 \sin x + 4 \cos x = \frac{6t}{1+t^2} + \frac{4(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$= \frac{4+6x-4t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} = \int \frac{1+t^2}{4+6t-4t^2} . \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1}{2+3t-2t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{3}{2}t-t^2}$$

Lengkapilah bentuk kuadrat dalam penyebutnya seperti yang kita lakukan sebelumnya dan kemudian selesaikanlah.

56. $$\frac{1}{5}.\ln\left\{\frac{1+2\tan x/2}{4-2\tan x/2}\right\}+C$$

Karena $1 + \frac{3}{2}t - t = 1 - (t^2 - \frac{3}{2}t \quad)$

$= 1 - (t^2 - \frac{3}{2}t + [\frac{3}{2}t]^2 + \frac{9}{16})$

$= \frac{25}{16} - \left(r - \frac{3}{4}\right)^2$

$= \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(r - \frac{3}{4}\right)^2$

integral $1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(r - \frac{3}{4}\right)^2} dt$

$$= \frac{1}{5}.\ln\left\{\frac{1+2t}{4-2t}\right\} + C = \frac{1}{5}\ln\left\{\frac{1+2\tan x/2}{4+2\tan x/2}\right\} + C$$

dan sekarang satu lagi untuk anda seluruhnya anda kerjakan sendiri. Kerjakankanlah sampai selesai kemudian periksalah pekerjaan anda apakah sesuai dengan jawaban .

Contoh 3. $\int \frac{1}{1+\sin x - \cos x} dx = ...$

57. $\ln\left\{\frac{\tan x/2}{1+\tan x/2}\right\} + C$

Inilah hasil pernyelesaiannya.

$1 + \sin x - \cos x = 1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$= \frac{1+t^2+2t-1+t^2}{1+t^2} = \frac{2(t^2+t)}{1+t^2}$

$=$

$$I = \int \frac{1+t^2}{2(t^2+t)}.\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^2+t} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \ln \left\{ \frac{t}{1+t} \right\} + C$$

$$= \ln \left\{ \frac{\tan x/2}{1+\tan x/2} \right\} + C$$