

Materi XIII

Deret Fourier

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat memahami konsep deret fourier
2. Mahasiswa mampu mnyelesaikan persoalan sederhana pada deret fourier
3. Mahasiswa mampumenyelesaikan persoalan keteknik elektroan dengan deret fourier.

A. METODA FOURIER

Beberapa fungsi berulang, seperti fungsi sinus, mempunyai perilaku yangbaik dan mempunyai pernyataan matematika yang sederhana. Fungsi-fungsi berulang yang lain, gelomabang segiempat, gelombang segitiga dan gelomabng gigi gergaji, yang, yang merupakan bentuk-bentuk gelombang yang penting dalam teknik, tidak sesederhana fungsi sinus tu. Ahli matematika bangsa Perancis, Jean-Babtiste Joseph Fourier (1768 - 1830), sewaktu mempelajari persoalan alirabn panas di tahun 1822, membukikan bahwa suatu fungsi beruang sebaang dapat diwakili oleh suatu deret sinusioda tak terhingga.

Dalam bab ini akan kita peajarai deret itu dan perluasannya untuk fungsi-fungsi tak-berulang dengan intetral Fourier.

B. DERET FOURIER

Kita awali pembahasan kita dengan meninjau suatu fungsi $f(t)$ yang berulang dengan perioda T ; yaitu :

$$f(t) = f(t + T)$$

seperti yang telah dibuktikan oleh Fourier, jika $f(t)$ memenuhi syarat *Dirichlet**, dapat diwakili oleh sinusoida tak terhingga

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots$$

$$+ b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$

atau secara lebih ringkas sebagai

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_0 t + b_n \sin \omega_0 t)$$

Dimana $\omega_0 = 2\pi/T$ disebut frekwensi sudut besar. Deret ini disebut deret Fourier trigonometri $f(t)$. a dan b itu disebut koefisien-koefisienfourier dan tentu saja tergantung kepada $f(t)$. suku a_0 disebut ordinat rata-rata komponen searah pada gelombang itu. suku

$$a_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t$$

adalah komponen dasar yang mempunyai frekwensi dan periode yang sama seperti gelombang aslinya. Suku –suku berikutnya diambil berpasangan dalam bentuk.

$$a_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t$$

Disebut komponen harmonisa ke n untuk fungsi tersebut.

DAFTAR 15.1 INTEGRAL UNTUK FUNGSI SINUSOIDA DAN HASIL KALINYA

$f(t)$	$\int^{2\pi/\omega} f(t)dt, \omega \neq 0$
	0
1. $\sin(\omega t + \alpha), \cos(\omega t + \alpha)$	0
2. $\sin(n\omega t + \alpha), \cos(n\omega t + \alpha)$	0
3. $\sin^2(\omega t + \alpha), \cos^2(\omega t + \alpha)$	π/ω
4. $\sin(m\omega t + \alpha), \cos(n\omega t + \alpha)$	
5. $\cos(m\omega t + \alpha), \cos(n\omega t + \beta)$	0, $m \neq n$ $\pi \cos(\alpha - \beta)/\omega$ $m = n$

M dan n adalah bilangan bulat

Nilai koefisien a dan b dapat ditentukan dengan integritas kedua ruas persamaan (15.1) untuk keseluruhan perioda : yaitu

$$\int^T f(t)dt = \int_0^T \frac{d\omega}{2} dt$$

$$+ \sum \int^T (a_n \cos n \omega_o t + b_n \sin n \omega_o t) dt$$

karena $T = 2\pi/\omega_0$, setiap suku dalam penjumlahan itu sama dengan nol menurut nomor 2 dalam daftar 15.1 ($\alpha = 0$), sehingga kita dapatkan

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

selanjutnya kita kalikan persamaan (15.1) itu dengan $\cos m\omega_0 t$, dimana m adalah bilangan bulat, lalu kita integrasikan dan hasilnya adalah

$$\int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt = \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos m\omega_0 t dt$$

menurut nomor 2,4 dan 5 pada Daftar 15.1 (untuk , setiap suku pada ruas kanan samadengan nol kecuali untuk suku dimana $n = m$ dalam penjumlahan yang pertama. Suku itu diberikan oleh

$$\alpha_m \int_0^T \cos^2 m\omega_0 t dt = \frac{\pi}{\omega_0} a_m = \frac{T}{2} a_m$$

sehingga

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m\omega_0 t dt, m = 1,2,3,\dots$$

Akhirnya dengan mengalikan persamaan (15.1) dengan $\sin m\omega_0 t$, mengintegrasikannya dan dengan menerapkan Daftar 15.1, kita dapatkan

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m\omega_0 t dt, m = 1,2,3,\dots$$

Nampak bahwa persamaan (15.2) merupakan kasis khusus untuk $m = 0$ bagi persamaan (15.3) (itulah sebabnya kita gunakan $\alpha_0/2$, bukannya α_0

sebagai suku konstantanya). Juga dapat dengan mudah untuk dibuktikan bahwa dengan mengintegrasikannya sepanjang setiap selang T , misalnya dari t_0 sampai dengan $t_0 + T$ untuk setiap t_0 dan hasilnya akan tetap sama. Oleh karena itu dapat kita simpulkan dengan memberikan koefisien-koefisien Fourier itu sebagai

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

Telah kita gantikan subskrip penolong m dengan n agar sesuai dengan pernyataan pada persamaan (15.1).

CONTOH 15.1

Uraian fungsi yang berupa gelombang gigi-gergaji seperti yang diberikan pada gambar (15.1).

JAWAB

Fungsi gelombang gigi gergaji itu diberikan oleh

$$f(t) = t \quad -\pi < t < \pi$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Karena $T = 2\pi$ kita dapatkan $\omega_0 = 2\pi/T = 1$. jika kita pilih $t_0 = \pi$, maka persamaan pertama pada (15.5) adalah

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} t dt = 0$$

Untuk $n = 1, 2, \dots$ kita gunakan persamaan (15.5b)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n t dt = 0 \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (\cos nt + nt \sin nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin n t dt \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (\sin nt - nt \cos nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2 \cos n \pi}{n} \\ &= -\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Dari hasil di atas deret fourier untuk persamaan (15.6) adalah

$$f(t) = 2 \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}$$

Komponen dasar dan harmonisa kedua, ketiga, serta kelima dilukiskan pada gambar 15.2 (a) untuk satu periode. Jika sejumlah suku-suku pada persamaan (15.7) dengan jumlah yang cukup banyak dijumlahkan, hasilnya akan sangat mendekati $f(t)$. Misalnya 10 harmonisa pertama dijumlahkan dan hasilnya nampak pada gambar 15.2(b).

CONTOH 15.2 Uraikan fungsi berikut ini :

$$f(t) = 0 \quad -2 < t < -1$$

$$= 6 \quad -1 < t < 1$$

$$= 0 \quad 1 < t < 2$$

$$f(t) + 4 = f(t)$$

Menjadi suatu deret Fourier.

JAWAB

Terbukti bahwa $T = 4$ dan $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$. jika kita ambil $t_0 = 0$ dalam persamaan (15,5) kita harus memisahkan integral itu menjadi tiga bagian karena pada selang dari 0,6 dan 0. jika $t_0 = -1$, kita hanya harus membagi integral itu menjadi dua bagian karena $f(t) = 6$ dari -1 sampai 1 dan $f(t) = 0$ dari 1 sampai 3. oleh karena itu kita pilih $t_0 = -1$ dan kita dapatkan

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 dt = 6$$

Juga kita dapatkan

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \cos \frac{n \pi t}{2} dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \cos \frac{n \pi t}{2} dt \\
 &= \frac{12}{n \pi} \sin \frac{n \pi}{2}
 \end{aligned}$$

Dan akhirnya

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \sin \frac{n \pi t}{2} dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \sin \frac{n \pi t}{2} dt$$

Jadi deret Fourier itu adalah

$$f(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3 \pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5 \pi t}{2} \dots \right)$$

Karena ketiadaan harmonisa-harmonisa genap kita ringkaskan deret itu menjadi

$$f(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos([(2n-1)\pi t]/2)}{2n-1}$$

C. SIFAT SIMETRI

Jika suatu fungsi mempunyai simetri terhadap sumbu tegak atau titik asal, maka perhitungan koefisien-koefisien Fourier akan menjadi sederhana. Suatu fungsi $f(t)$ yang simetri terhadap sumbu tegak dikatakan sebagai *fungsi genap* dan mempunyai sifat

$$f(t) = f(-t)$$

untuk setiap t . Misalnya t^2 dan $\cos t$ merupakan fungsi-fungsi genap. Bentuk khas fungsi genap itu diberikan pada gambar 15.3 (a).

suatu afungsi $f(t)$ yang simetri terhadap titik asal dikatakan sebagai *fungsi ganjil* dan mempunyai sifat.

$$f(t) = -f(-t)$$

sebuah contoh fungsi ganjil diberikan pada gambar 15.3(b) dan contoh lainnya adalah t dan $\sin t$.

Terbukti menurut gambar 15.3 (a), nampak bahwa $f(t)$ yang berupa fungsi genap memberikan

$$-a \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

Dalam hasil itu benar karena luas dari $-a$ ke 0 identik dengan luas dari 0 ke a . hasil itu juga dapat di buktikan secara analitis

$$\begin{aligned} -a \int_0^a f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_{-a}^0 f(-\tau) d\tau + \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^a f(\tau) d\tau + \int_0^a f(t) dt \\ &= 2 \int_0^a f(t) dt \end{aligned}$$

Dalam hal $f(t)$ berupa fungsi ganjil, jelas dari gambar 15.3 (b).

$$-a \int_0^a f(t) dt = 0$$

Hal itu benar karena luas dari $-a$ ke 0 tepat sama dengan negatif luas dari 0 ke a . hasil tersebut dapat pula dibuktikan secara analitis sebagaimana halnya dengan fungsi genap.

Untuk mendapatkan koefisien-koefisien Fourier perlu untuk mengintegrasikan fungsi-fungsi.

$$g(t) = f(t) \cos n \omega_0 t$$

dan

$$h(t) = f(t) \sin n \omega_0 t$$

jika $f(t)$ genap maka

$$\begin{aligned} g(-t) &= f(-t) \cos (-n \omega_0 t) \\ &= f(t) \cos n \omega_0 t \\ &= g(t) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} h(-t) &= f(-t) \sin (-n \omega_0 t) \\ &= -f(t) \sin n \omega_0 t \\ &= -h(t) \end{aligned}$$

Jadi fungsi $g(t)$ genap dan $h(t)$ ganjil. Karena itu dengan membuat $t_0 = -T/2$ dalam persamaan (15.5), untuk $f(t)$ genap kita dapatkan

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n \omega_0 t dt$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dengan prosedur yang sama dapat kita buktikan untuk $f(t)$ ganjil,

$$a_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Dalam kedua hal diatas salah satu himpunan koefisien seluruhnya samadengan nol da yang lain diperoleh dengan mengambil dua kali integral perioda sesuai dengan yang diberikan pada (15.14) dan (15.15).

Jadi ternyata bahwa fungsi genap tidap mempunyai suku-suku sinus dan suatu fungsi ganjil tidak mempunyai suku konstanta dan kosinus dalam deret Fouriernya. Sebagai contoh, Contoh 15.1 adalah fungsi ganjil dan Contoh 15.2 adalah fungsi genap.

CONTOH 15.3 :

Tentukan koefisien untuk fungsi gelombang segi-empat seperti yang ditunjukkan oleh gambar 15.4.

JAWAB

Nampak dengan titik asal yang telah ditentukan itu fungsi gelombang segiempat tersebut berupa fungsi ganjil, sehingga himpunan koefisien a untuk deret Fouriernya akan semadengan nol. Dari gambar 15.4 tersebut nampak bahwa $T = 1$, dan $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$. bentuk gelombangnag itu, untuk selang waktu $0 \leq t \leq 1$, dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & 0 < t < 0,5 \\ &= -1 & 0,5 < t < 1 \\ f(t+1) &= f(t) \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{0,5} 1 \sin 2\pi n t \, dt = 4 \int_0^{0,5} \sin 2\pi n t \, dt \\
 &= \frac{2}{\pi n} (\cos \pi n - 1) = \frac{2}{\pi n} [(-1)^n - 1]
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu $b_n = 0$ jika n genap dan samadengan $16/n\pi$ untuk n ganjil.

Nilai efektif atau rms, untuksuatu fungsi $f(t)$ diberikan oleh

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt}$$

Jika $f(t)$ diuraikan menjadi suatu deret Fourier, nilai efektif $f(t)$ dapat kita tentukan dari koefisien-koefisien Fouriernya.

Jadi jika

$$f(t) = \frac{a_0 f(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(t) \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

Maka

$$F^2(t) = \frac{a_0 f(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(t) \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

Jika kita integrasikan terhadap waktu dari nol ke T dan kita kenali bajwa integral-integral ruas kanan itu tidak lain adalah koefisien-koefisien Fourier, kita dapatkan

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

Suatu hasil yang dikenal sebagai *teorema parseval* yang berlaku untuk setiap fungsi yang memenuhi persyaratan didichlet.

Seringkali terjadi bahwa fungsi $f(t)$ itu tidak berulang, dan akan kita tinjau metoda lain kelak untuk kasus ini. Tetapi, seringkali aterjadi, kita tertarik pada $f(t)$ ini untuk suatu selang terbatas $(0,T)$, dimana dapat kita andaikan fungsi Fourierinya seperti biasanya. Tentu saja apa yang kita dapatkan di sini bukanlah deret Fourier untuk $f(t)$ atetapi perluasan berulangnya, kita dapat menggunakan hasil itu pada selang yang kita amati dan kita tidak berkepentingan dengan kelakukan berulangnya ditempat lain. Atau kita dapat menganggap $(0,T)$ sebagai setengah perioda dan kita uraikan $f(t)$ baik sebagai fungsi genap ataupun sebgai fungsi ganjil dengan menggunakan persamaan (15.14) atai (15.15). hasilnya kita katakan sebagai deret sinus atau kosinus *setengah kawasan*, yang akan mudah dan sama berlakunnya untuk selang yang kita amati.

D. DERET FOURIER EXPONENSIAL

Perwakilan suku-suku sinusuida dalam deret Fourier tigonometrik dapat kita gantikan dengan setara exponensialnya berdasarkan rumus Euler sebagai

$$\text{Cos } n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

Dan

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

Dan dengan mengumpulkan suku-suku yang sama, kita dapatkan

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

Jika kita definisikan suatu koefisien baru c_n sebagai

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

Dan kita gantikan a dan b_n yang telah kita peroleh pada persamaan (15.15), dengan $t_0 = -T/2$, kita dapatkan

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Atau menurut rumus euler

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Kita lihat juga bahwa c_n (sekawan c_n) diberikan oleh

$$c_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t) dt$$

Yang terbukti samadengan c_{-n} (c_n dengan n yang diganti dengan $-n$).
jadi

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

Akhirnya kita lihat bahwa

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Yang menurut persamaan (15.18) adalah

$$\frac{a_0}{2} = c_0$$

Persamaan (15.17), (15.20) memungkinkan menulis persamaan (15.16) dalam bentuk

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\sigma_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\sigma_0 t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\sigma_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\sigma_0 t} \end{aligned}$$

Atau, lebih ringkas lagi bila kita tulis,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\sigma_0 t}$$

Dimana c_n telah diberikan oleh persamaan (15.18). bentuk deret Fourier ini disebut *deret Fourier exponensial* dan umumnya lebih mudah untuk didapatkan karena hanya di perlukan satu himpunan koefisien yang perlu untuk dihitung.

Contoh 15.4

Tentukan uraianderet Fourier exponensial untuk gelombang segiempat yng diberikan oleh

$$\begin{aligned} f(t) &= 4 && 0 < t < 1 \\ &= -4 && 1 < t < 2 \\ f(t + 2) &= f(t) \end{aligned}$$

Jawab

Terbukti $T = 2$ sehingga $\omega_0 = \pi$, sehingga

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Untuk $n \neq 0$ kita dapatkan

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-4) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 (-4) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{4}{jn\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Juga kita mempunyai untuk $n \neq 0$, baik langsung mengganti n jika hasil diatas dengan nol maupun bila kita menggunakan persamaan (15.20), hasilnya adalah samadengan nol.

Karena $c_n = 0$ untuk n genap dan $c_n = 8/jn\pi$ untuk n ganjil, deret eksponensial itu dapat kita tulis sebagai

$$f(t) = \frac{8}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{j(2n-1)\pi t}$$

C. TANGGAPAN TERHADAP RANGSANGAN BERULANG

Jika suatu jala-jala diberi rangsangan yang berupa suatu fungsi berulang sebarang yang mempunyai uraian deret Fourier, tanggapan untuk setiap suku pada deret itu dapat diperoleh dengan cara fasor. Selanjutnya tanggapan keseluruhannya adalah, menurut teorema superposisi, jumlah masing-masing tanggapan itu.

CONTOH 15.5

Suatu rangkaian RL seri dengan $R = 6 \Omega$ dan $L = 2$ H. dirangsang oleh suatu sumber dengan gelombang segiempat yang diberikan menurut.

$$\begin{aligned} v(t) &= 4 \text{ V} & 0 < t < 1 \text{ s} \\ &= -4 \text{ V} & 1 < t < 2 \text{ s} \\ v(t+2) &= v(t) & 0 < t < 1 \text{ s} \end{aligned}$$

D. Jawab

Rangkaian yang berupa gelombang segiempat itu dapat diuraikan menjadi suatu deret Fourier sebagai

$$v(t) = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi t}{2n-1}$$

Oleh karena itu dapat kita tulis sebagai

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Dimana

$$v_n(t) = \frac{16}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)\pi t$$

Adalah harmonisa ke $(2n-1)$ untuk $v(t)$ dengan frekuensi $\omega_n = (2n-1)\pi$ rad/s.

Tegangan fasornya adalah

$$V_n = \frac{16}{(2n-1)\pi} / 0^\circ$$

Dan impedensi rangkaian itu dilihat dari kutub-kutub sumber pada ω_n adalah

$$\begin{aligned} Z(j\omega_n) &= 6 + j2(2n-1)\pi \\ &= 2 \sqrt{9 + \pi^2 (2n-1)^2} / \tan^{-1} \frac{1(2n-1)\pi}{3} \end{aligned}$$

Sehingga arus fasornya adalah

$$I_n = I_n \angle -\theta_n$$

Dimana

$$I_n = \frac{8}{(2n-1)\pi\sqrt{9+\pi^2}(2n-1)^2}$$

Dan

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{(2n-1)\pi}{3}$$

Arusnya dalam kawasan waktu adalah

$$i(t) = I_n \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

Oleh karena itu, menurut teorema superposisi, komponen terpaksa arus itu adalah

$$i_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

Masukkan $v(t)$ dalam contoh di atas tidak hanya mengandung satu frekuensi saja, seperti yang biasa kita alami dalam rangsangan sinusoida, melainkan dengan frekuensi yang tak-terhingga banyaknya. Atenuasi saja demikikian pula dengan keluarannya $i(t)$. karena deret Fourier itu menunjukkan amplituda di samping fasanya, untuk setiap frekuensi,

dengan mudah dapat kelihatan frekuensi-frekuensi mana yang memegang peran penting dalam pembentukan keluarannya itu dan yang madna yang tidak. Hal itu tentu saja merupakan salah satu penerapan yang penting untuk deret Fourier dan akan kita tinjau dengan lebih mendalam pada bagian berikut ini.

D. SPEKTRUM FREKWENSI

Harmonisa ke n dalam deret Fourier trigonometri dapat kita tulis dalam bentuk sebuah sinusoida.

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = A_n \cos (n\omega_0 t + \phi_n)$$

Dengan amplituda

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Dan fasa

$$\phi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

Dalam suku-suku deret exponensial, koefisiennya adalah

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

Atau dalam bentuk polar

$$c_n = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} \angle -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

Sehingga kita dapatkan

$$c_n = \frac{A_n}{2} / \phi_n$$

Suatu fungsi keluaran $f(t)$, yang diberikan dalam kawasan waktu, dapat ditunjukkan dalam kawasan frekwensinya dalam $A_n/2$ dan ϕ_n $n = 0, 1, 2, \dots$ misalnya jika kita ingin mengetahui apakah harmonisa ke n itu dominan atau tidak, cukup kita selidiki $A_n/2$ terhadap frewensi. Karena frekwensi-frekwensi itu mempunyai nilai-nilai yang *diskrit* (tak seimbang) seperti $0, \omega_n, 2\omega_0$ dan seterusnya, lukisan itu berupa suatu himpunan garis-garis tegak yang panjangnya sebanding dengan $A_n/2$. lukisan semacam itu disebut *spektrum amplituda disrit* atau *spektrum garis* yang analog dengan tanggapan amplituda yang telah kita bahas dalam bab 12 untuk kaus yang sinambung. lukisan garis ϕ_n disebut *spektrum fasa diskrit* yang analog dengan tanggapan fasa dalam hal yang sinambung. Komponen searahnya tentu saja diberikan oleh $A_0 = a_0/2$ dan $\phi_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f(t) &= V_0 & -a/2 < t < a/2 \\ &= 0 & -T/2 < t < -a/2 \\ &= 0 & -a/2 < t < T/2 \\ f(t + T) &= f(t) \end{aligned}$$

Gambar 15.5 menunjukkan bentuk gelombang pulsa berulan dengan besar V_0 dengan lama pulsa a . koordinat pulsa itu dipilih sedemikian hingga

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} V_0 e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Dalam bentuk radar, faktor a/T didefinisikan sebagai *faktor tugas* (*duty factor*). Kita tertarik pada spektrum $f(t)$ pada saat faktor tugas itu menjadi makin kecil mendekati nol dalam limitnya.

Koefisien Fourier untuk $f(t)$ itu dapat ditentukan dari persamaan (15.18) untuk setiap n ; sehingga

Sekarang, karena $T = 2\pi/\omega_0$, persamaan itu dapat kita tulis sebagai

$$c_n = V \frac{a}{T} \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \quad (15.26)$$

Jika kita misalkan $x = n\omega_0 a/2$, maka Persamaan (15.26) itu menjadi berbentuk $(\sin x)/x$ yang dikenal sebagai *fungsi contoh* (*sampling function*) yang sering dijumpai dalam buku-buku matematika dan ditunjukkan bentuknya dalam Gambar 15.6. Nampak bahwa fungsi itu mempunyai nilai 1 bila $x = 0$, yang bersesuaian dengan $n = 0$ dalam Persamaan (15.26) itu. Nampak juga bahwa c_n dapat mempunyai nilai positif atau negatif yang bersesuaian dengan fasa ϕ_n yang bernilai 0° atau 180° .

Karena Persamaan (15.26) itu hanya mempunyai nilai untuk frekwensi-frekwensi $n\omega_0$ yang diskrit; nilai-nilai itu merupakan garis-garis dalam spektrum amplituda untuk fungsi tersebut. Sampul c_n merupakan fungsi sinambung yang diperoleh dengan menggantikan $n\omega_0$ dengan w sehingga

$$\text{Sampul } c_n = V_0 \frac{a}{T} \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2} \quad (15.27)$$

Selanjutnya kita selidiki c_n itu pada saat perbandingan a/T berubah. Mula-mula kita periksa untuk faktor tugas sebesar $1/2$ dan kemudian untuk $1/5$ akhirnya kita buat untuk umum dimana faktor tugas itu sama dengan $1/N$. Untuk $a/T = 1/2$, sampel c_n itu adalah

$$\text{Sampul } c_n = \frac{V_0 \sin(\omega a / 2)}{\omega a / 2}$$

yang ditunjukkan sebagai lengkungan terputus-putus pada Gambar 15.7(a). Sampul itu mempunyai nilai sama dengan nol untuk

$$\frac{\omega a}{2} = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

atau pada frekwensi

$$\omega = \frac{\pm 2\pi}{a}, \frac{\pm 4\pi}{a}, \frac{\pm 6\pi}{a}, \dots$$

(15,28)

Untuk frekwensi dasar pada $f(t)$, $\omega_0 = 2\pi/T$, dengan $T = 2a$, c_n mempunyai nilai W pada

$$n\omega_0 = \frac{2n\pi}{5a}$$

Dengan membandingkan Persamaan (15.28) dengan (15.29) kita lihat bahwa harmonisa genap mempunyai nilai nol kecuali, untuk c_0 . Hal. itu dilukiskan pada Gambar 15.7(a) yang. menunjukkan spektrum amplituda mempunyai garis-garis pada $\pm n\omega_0$ hanya untuk n ganjil.

Selanjutnya untuk $a/T = 1/5$, sampel untuk spektrum amplituda itu adalah

$$\text{Sampul } c_n = \frac{V_0 \sin(\omega a / 2)}{5 \omega a / 2}$$

Garis-garis akan terdapat untuk spektrum amplituda dan fasa itu bila

$$n\omega_0 = \frac{2n\pi}{5a}$$

Dengan membandingkannya dengan Persamaan (16.28) nampak bahwa garis-garis pada $\pm 5\omega_0$, $\pm 10\omega_0$ dan seterusnya mempunyai amplituda nol. Spektrum amplituda itu ditunjukkan pada Gambar 15.7(b).

Secara umum, untuk faktor tugas a/T P. $1/N$, jarak pemisah antara dua garis dalam spektrum itu adalah

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 \quad (15.30)$$

dan amplituda garis itu adalah

$$|c_n| = \frac{V}{N} \left| \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \right| \quad (15.31)$$

dimana

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{Na}$$

Pada saat N menjadi sangat besar, katakan 1000 atau 10.000 banyaknya garis dalam suatu selang frekwensi tertentu akan sangat beau, jarak pemisahannya akan menjadi sangat kecil. Lebih banyak komponen-komponen frekwensi yang diperlukan untuk pulsa yang lebih pendek, tetapi amplituda komponen-komponen frekwensi yang dibutuhkan itu akan semakin pendek